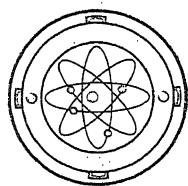
ISSN : 0505-5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of
the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 45 October 2002 No.4

विज्ञान परिषद् प्रयाग

महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नालॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड
इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विषय-सूची

Vol. 45 October 2002 No.4

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 4, October 2002.

अंतरिक्ष किरणें तथा भू-चुम्बकीय परिवर्तन पर परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन का लघु अवधि प्रभाव

जी. एन. सिंह
भौतिक शास्त्र विभाग,
सुदर्शन महाविद्यालय, लालगांव, रीवां (म. प्र.)
तथा
पंकज कुमार श्रीवास्तव
भौतिक शास्त्र विभाग,
शासकीय नवीन विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ (म. प्र.)

[प्राप्त —अप्रैल, 29, 2002]

सारांश

परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन (Coronal Mass Ejections CME) एक महत्त्वपूर्ण अन्तर्ग्रहीय घटना के रूप में व्याख्यायित हुआ है, जो 1AU पर अंतरिक्ष किरणों के बदलाव तथा भू-चुम्बकीय क्षेत्र पर अपना प्रभाव डालता है। सौर कोरोना (Solar Corona) में प्रभावी परिवर्तन सी. एम. ई. द्वारा प्रदर्शित किया जाता है, क्योंकि 10^{12} kg तक तत्त्व अन्तर्ग्रहीय माध्यम में इसके द्वारा प्रक्षेपित किया जाता है। अन्तर्ग्रहीय आकाश में इतनी बड़ी मात्रा में (10^{25} जूल) ऊर्जा के प्रक्षेपण से सौर पवन के घनत्व तथा चुम्बकीय संरचना में परिवर्तन उत्पन्न होता है। इस कार्य में सन् 1988 से 1993 की अवधि में परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन की घटनाओं का चुम्बकीय गतिविधि तथा अंतरिक्ष तरंग से सम्बन्ध का अध्ययन किया गया है। इस अध्ययन में यह पाया गया है कि वे परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन की घटनाएं, जो B-प्रकार के सौर भभूका (Solar flare) से सम्बन्धित रहती हैं, भू-चुम्बकीय क्षेत्र में अधिक विक्षोभ (Disturbances) उत्पन्न करती हैं।

Abstract

Effect of coronal mass ejections on cosmic rays and geomagnetic changes on short-term basis. *By* G. N. Singh, Physics Department, Sudarshan College, Lalgaon, Rewa (M.P.) and Pankaj Kumar Shrivastava, Physics Department, Government New Science College, Rewa (M.P.).

Coronal Mass Ejections (CMEs) are described as a turbulent interplanetary phenomena at 1AU, which influence the modulation of cosmic rays as well as disturbances in geomagnetic field. CMEs represent large scale changes in the solar corona as upto 10^{12} kg of matter is expelled into interplanetary medium. Such a huge amount of energy (10^{25} J) propagates into interplanetary space and produces perturbation of the density and magnetic structure in the solar wind. In this work, we have studied the relation of Coronal Mass Ejection with geomagnetic activity and cosmic rays for the period 1988 to 1993. It has been found that the Coronal Mass Ejections in association with B-type solar flares produce maximum geomagnetic disturbances.

परिचय

परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन (Coronal Mass Ejection) को अब अन्तर्ग्रहीय माध्यम में एक महत्त्वपूर्ण कारक के रूप में समझा जाता है। सौर प्रभावित क्षेत्रों में व्यवधानों तथा परिवर्तनों को समझाने के लिए परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन का महत्त्वपूर्ण स्थान है क्योंकि इनके द्वारा अन्तर्ग्रहीय माध्यम में बहुत बड़ी मात्रा में ऊर्जा तथा द्रव्यमान प्रक्षेपित किया जाता है। प्रारंभिक चरण में यह समझा गया था कि भू-चुम्बकीय परिवर्तनों का कारण सौर भभूका (Solar flare) है किन्तु वर्तमान अध्ययनों में यह बात सामने आयी है कि परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन की घटनाएं अंतरिक्ष विज्ञान के शोध में एक नई उपलब्धि हैं जिनके द्वारा भू-चुम्बकीय क्षेत्र तथा उच्च ऊर्जा अंतरिक्ष तरंग (Cosmic wave) कण पर प्रभाव का अध्ययन किया जा सकता है। सौर स्थैतिक भौतिकी (Solar-Terrestrial Physics) क्षेत्र में कई नवीनतम अन्वेषणों में भू-चुम्बकीय परिवर्तनों के मौलिक कारणों के रूप में परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन घटनाओं को पाया गया है।[1,2] कई अन्वेषणकर्ताओं द्वारा अंतरिक्ष किरण (Cosmic ray) के घटाव और परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन घटनाओं के घटित होने के बीच भी महत्त्वपूर्ण सम्बन्ध स्थापित किये गये हैं। इस प्रपत्र में भू-चुम्बकीय क्षेत्र विचरण में लघु अवधि आकार में परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन घटनाओं के प्रभाव का विधिवत् अध्ययन प्रस्तुत किया गया है तथा अध्ययन को आगे बढ़ाते हुए अंतरिक्ष किरण घटाव से परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन घटनाओं के सम्बन्ध को स्थापित किया गया है।

प्रयोगात्मक

परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन घटनाओं के आंकड़े सौर भूभौतिकी आंकड़ा पुस्तक (Solar

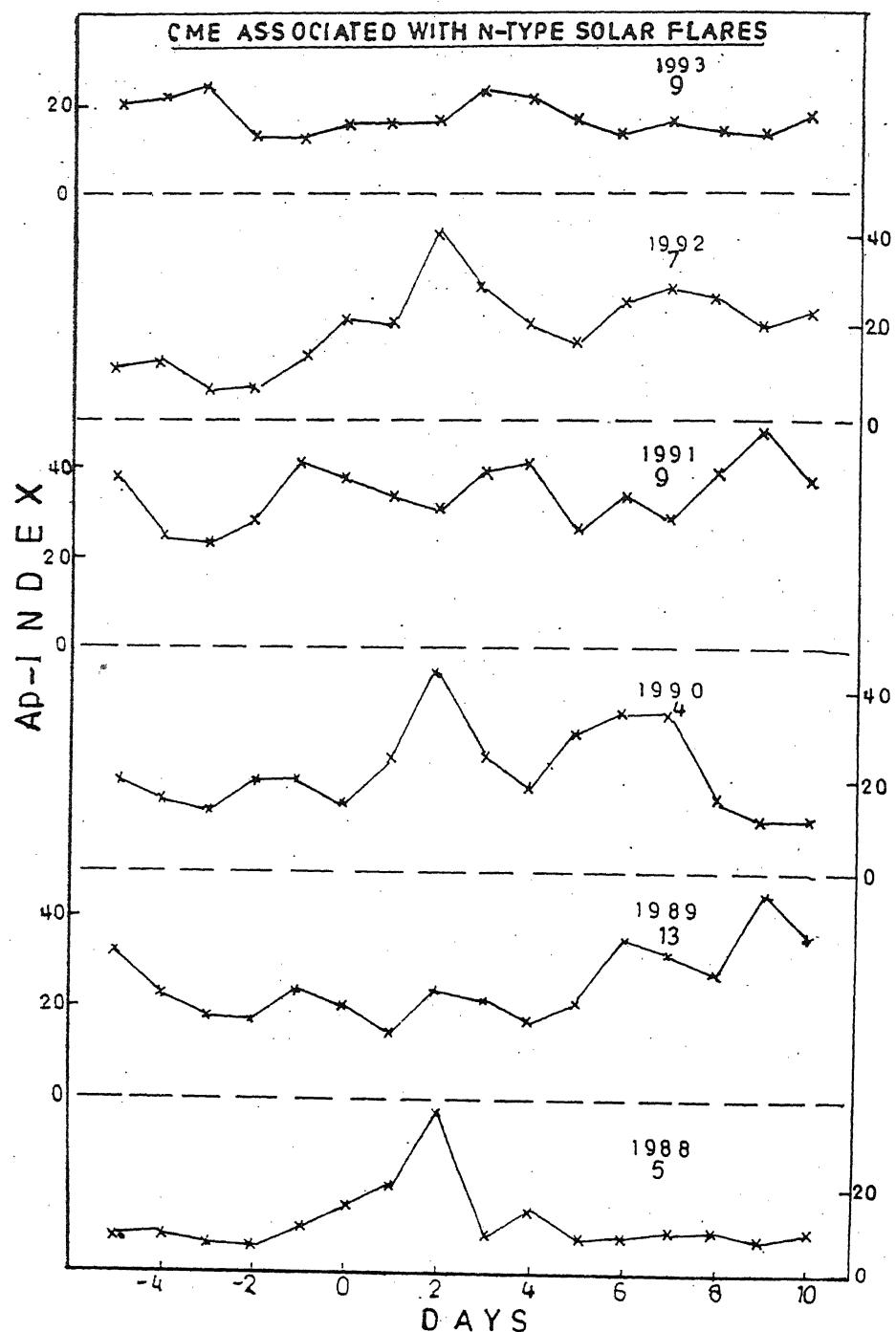
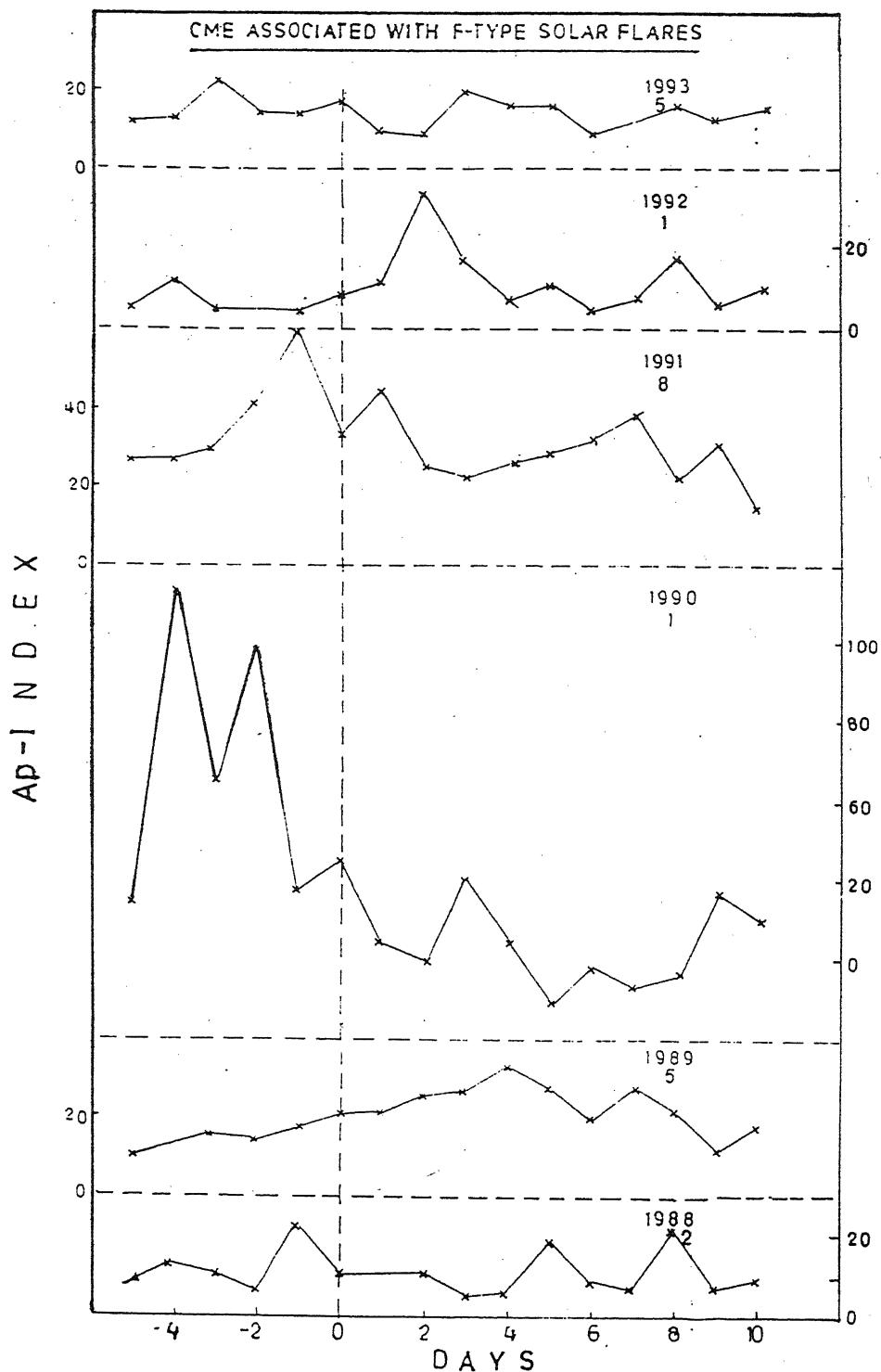
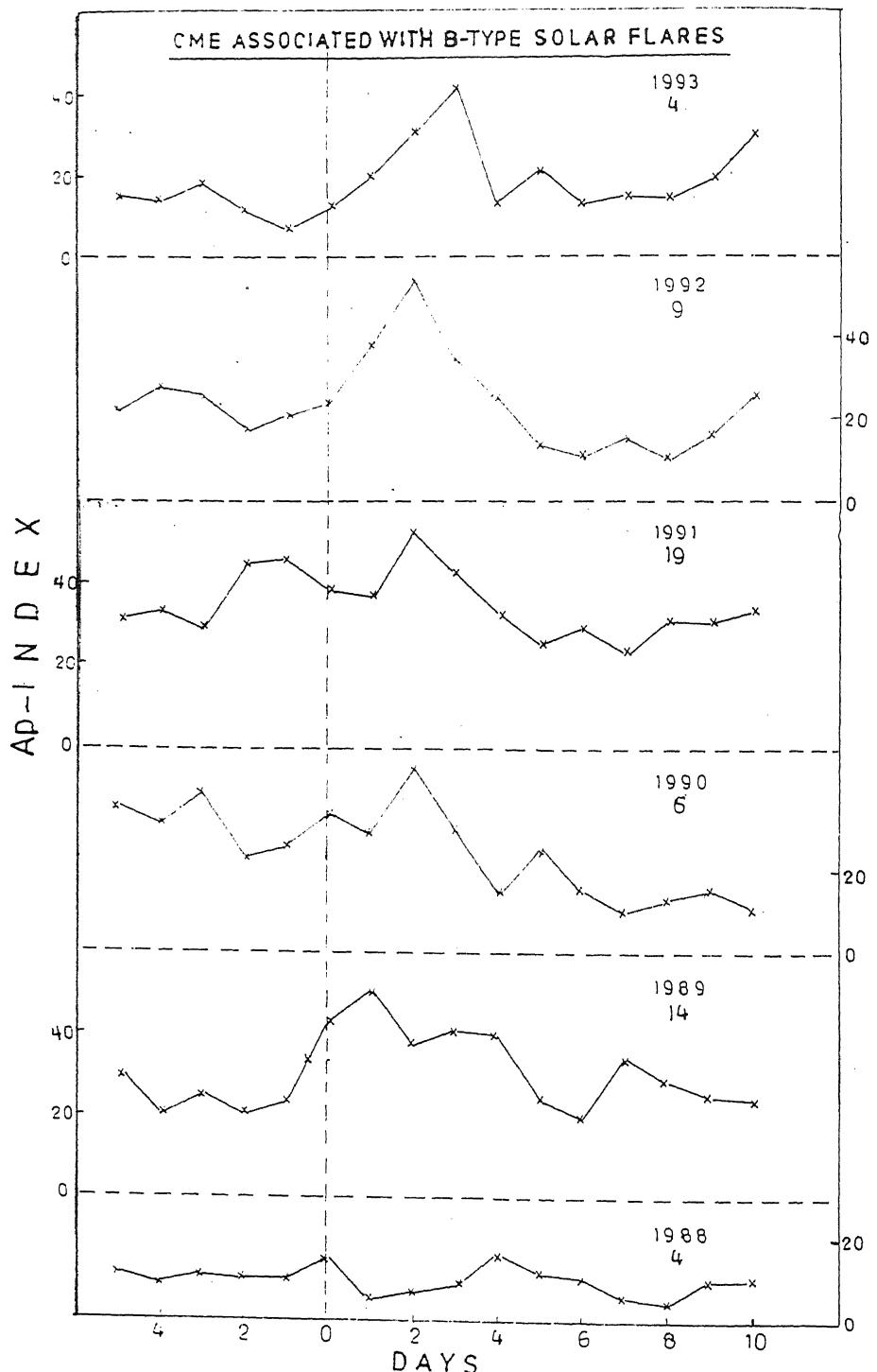
Geophysical data book) से लिए गए हैं जो मासिक रूप से नोआ (NOAA) वोल्डर, कोलेरेडो, अमेरिका से प्रकाशित होती है। हमने केवल उन्हीं परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन घटनाओं को चुना है जो लगातार या उससे अधिक घण्टों तक घटित हुई हैं। सन् 1988 से 1993 के बीच इस प्रकार की 125 घटनाओं को अध्ययन के लिए चुना गया है। अन्वेषण में ओलू फिन्लैण्ड के न्यूट्रान मॉनिटर के अंतरिक्ष किरणों के दैनिक प्रेक्षण का उपयोग किया गया है। इस शोधकार्य में हमने क्री-विश्लेषण (Chree analysis) की अध्यारोपण कालखण्ड विधि (Superposed Epoch Method) का उपयोग किया है।

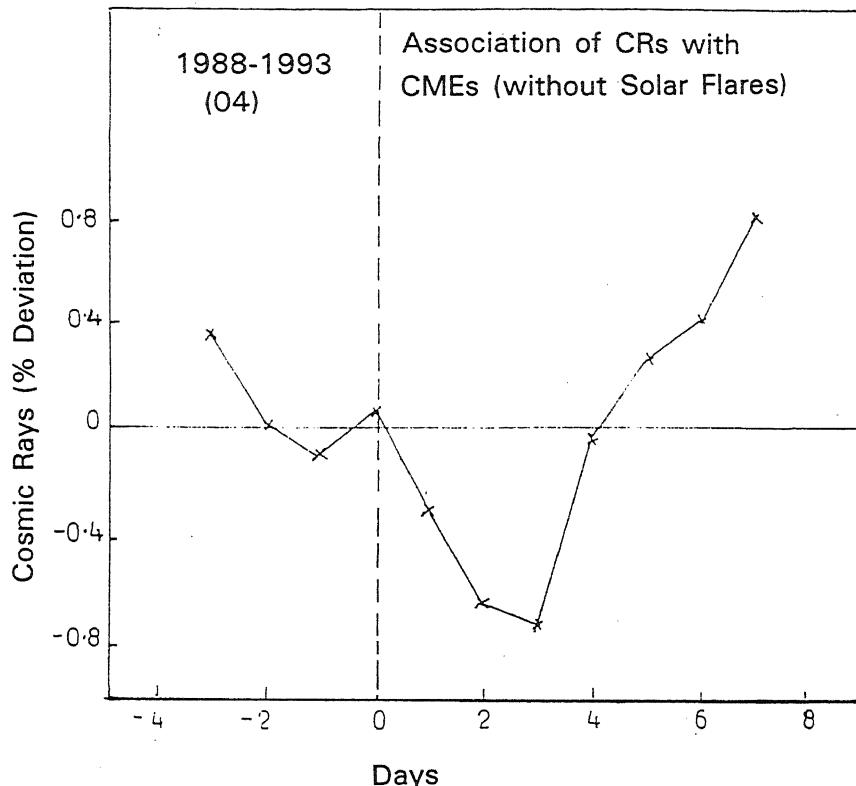
परिणाम तथा विवेचना

प्रायः बहुत से परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन, 1AU की दूरी पर चुम्बकीय रस्सी (Magnetic rope) के लिए बड़ी और एक-वर्णी आंतरिक क्षेत्र घुमाव का व्यवहार प्रदर्शित करते हैं। यहाँ ज्ञातव्य है कि सूर्य से पृथ्वी की दूरी IAU है। परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन न केवल सूर्य की सतह पर बल्कि अर्न्तग्रहीय आकाश में भी परिवर्तन करते हैं।[3] उदाहरणार्थ परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन (सी.एम.ई.) घटनाओं के साथ चुम्बकीय फ्लक्स रस्सी (Rope) संरचना में द्वि-दिशीय इलेक्ट्रान बहाव होता है। अन्तर्ग्रहीय आकाश में चुम्बकीय बादल घटनाओं (Magnetic cloud events) को भी परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन (सी.एम.ई.) का एक परिणाम या प्रदर्शन माना जाता है।

भू-चुम्बकीय क्षेत्र और लघु अवधि घटाव (अंतरिक्ष किरणों की तीव्रता पर) का एक कारण चुम्बकीय बादल घटनाएं और द्वि-दिशीय घटनाएं (बी.डी.ई.,एस.) भी हैं।[4] अन्तर्ग्रहीय आकाश में विक्षोभ उत्पन्न करने वाले सी.एम.ई. का चुम्बकीय बादल घटनाएं व्याख्या चित्र प्रस्तुत करते हैं। इसलिए इस व्याख्या को ध्यान में रखते हुए हमने चुम्बकीय क्षेत्र में सी.एम.ई. के पड़ने वाले प्रभाव का सांख्यिकीय विश्लेषण किया। इस कार्य में सौर भभूका से सम्बद्ध और असम्बद्ध चुम्बकीय गतिविधियों पर परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन के पड़ने वाले प्रभाव का अध्यारोपण-कालखण्ड विधि (Superposed Epoch Method) का क्री-विश्लेषण (Chree analysis) किया गया है। Ap सूचक को (चुम्बकीय विक्षोभ सूचक) भू-चुम्बकीय विक्षोभ के पैमाने के रूप में लिया गया है। सी.एम.ई. का प्रारंभ दिन शून्य दिन (Zero day) के रूप में लिया गया है। भू-चुम्बकीय विक्षोभ पर सौर भभूका (सी.एम.ई. से सम्बन्ध) के प्रभाव का अध्ययन करने के लिए सभी सी.एम.ई. घटनाओं को निम्न तीन भागों में बांटा गया—

1. N–प्रकार के सौर भभूका से सम्बन्ध।
2. F–प्रकार के सौर भभूका से सम्बन्ध।
3. B–प्रकार के सौर भभूका से सम्बन्ध।

5 से 10 दिन तक के क्री-विश्लेषण (Chree analysis) का परिणाम तीन अलग-अलग भागों हेतु क्रमशः चित्र 1, 2 और 3 में चित्रित किया गया है। सन् 1988 से 1993 तक के लिए प्रत्येक

चित्र —1 : N-प्रकार के सौर भभूका तथा परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन का भूचुम्बकीय सूचकांक Ap के साथ अध्यारोपित कालखण्ड विश्लेषण के परिणाम दर्शाये गये हैं।

चित्र —2 : F-प्रकार के सौर भभूका तथा परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन का भूचुम्बकीय सूचकांक Ap के साथ अध्यारोपित कालखण्ड विश्लेषण के परिणाम दर्शाये गये हैं।

चित्र —3 : B-प्रकार के सौर भभूका तथा परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन का भूचुम्बकीय सूचकांक Ap के साथ अध्यारोपित कालखण्ड विश्लेषण के परिणाम दर्शाये गये हैं।

वर्ष हेतु यह विश्लेषण किया गया। सी.एम.ई. घटनाओं (B-प्रकार के सौर भभूका से सम्बन्ध) हेतु वर्ष सन् 1988 से सन् 1993 तक प्रत्येक वर्ष में भू-चुम्बकीय गतिविधियों में महत्त्वपूर्ण अधिकता देखी गई। शून्य कालखण्ड दिन से 2-3 दिन तक Ap का मान अधिकतम से थोड़ा बढ़ता है, उन N-प्रकार के सौर भभूका के लिए जो सी.एम.ई. घटनाओं से सम्बद्ध हैं। इसके विपरीत F-प्रकार के सौर भभूका के लिए कोई निश्चित परिणाम तक पहुँचना कठिन लगा।

चित्र —4 : उन द्रव्यमान उत्सर्जन परिज्वाला का जो कि सौर भभूका से सम्बन्धित नहीं हैं, अंतरिक्ष किरणों पर प्रभाव दर्शाया गया है।

परिणामतः हम यह कह सकते हैं कि सी.एम.ई. घटनाओं से सम्बन्ध B-प्रकार के सौर भभूका भू-चुम्बकीय विक्षोभ उत्पन्न करने में महत्त्वपूर्ण कारक हैं। आगे हमने ओलू न्यूट्रान मानीटर से प्रति घण्टे प्राप्त अंतरिक्ष किरण तीव्रता के मान को इस प्रकार छांटा जहाँ लघु अवधि अंतरिक्ष किरण घटाव (तीव्रता से) 3 प्रतिशत या इससे अधिक था। 125 सी.एम.ई. घटनाओं में से 66 उच्च चाल

सौर पवन (High speed solar wind) धारा से सम्बद्ध पायी गयीं, ठीक इतनी ही घटनाएँ अंतरिक्ष किरणों की तीव्रता में घटाव से भी सम्बद्ध पायी गयीं। गैलेक्टिक अंतरिक्ष किरण (Galactic cosmic ray) बदलाव के संवहन विस्तार (Convection diffusion) चित्र में उच्च चाल सौर पवन धारा महत्त्वपूर्ण भूमिका अदा करती है। पूर्व अध्ययनों में, अंतरिक्ष किरणों में तीव्र घटाव के लिए सौर भभूका मूल की उच्च चाल और पवन धारा को एक महत्त्वपूर्ण कारक पाया गया था।[5] यह सर्व ज्ञात है कि लघु-अवधि में अंतरिक्ष किरण घटाव उत्पन्न करने का महत्त्वपूर्ण कारक सौर भभूका है। अब हमने उन सी.एम.ई. घटनाओं को चुना जो सौर भभूका से सम्बद्ध नहीं थीं। ये घटनायें उसी प्रकार की अंतरिक्ष किरण तीव्र घटाव उत्पन्न करने के कारण के रूप में पायी गयीं जैसा कि चित्र–4 में दिखाया गया है। अन्तर्ग्रहीय झटकों के कारण लघु अवधि बदलाव होता है, जो सौर चुम्बकीय क्षेत्र अर्थात् सी.एम.ई. के पुनः व्यवस्थित होते समय सूर्य से बाहर की ओर निकलने वाले तत्त्व के द्वारा होता है।

निष्कर्ष

इस विश्लेषण से यह निष्कर्ष निकलता है कि—

1. परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन जो कि B–प्रकार के सौर भभूका से सम्बन्धित है, उसके कारण भू-चुम्बकीय विक्षोभ उत्पन्न होते हैं।
2. ऐसी चुम्बकीय गतिविधियों में कम विक्षोभ पाया गया जो F–प्रकार के सौर भभूका के साथ परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन से सम्बन्धित थी।
3. अंतरिक्ष किरण तीव्रता से लघु अवधि तीव्र घटाव के लिए भी परिज्वाला द्रव्यमान उत्सर्जन घटनाओं को एक कारक घटक के रूप में पाया गया।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण आंकड़ा उपलब्ध कराने के लिए विश्व आंकड़ा केन्द्र-ए (World data centre-A) वाल्डर, क्लोरोडो, यू. एस. ए. को धन्यवाद ज्ञापित करते हैं। अंतरिक्ष किरण के ओलू न्यूट्रान मानीटर आंकड़ों हेतु स्वत्र. एच. एन. कानन, भौतिक विभाग, ओलू विश्वविद्यालय, फिन्लैण्ड के लिए भी लेखक धन्यवाद ज्ञापित करते हैं। एक लेखक (पंकज कुमार श्रीवास्तव) 27वीं अन्तर्राष्ट्रीय अंतरिक्ष किरण संगोष्ठी, हेमबर्ग, जर्मनी के उन सहभागियों को आभार व्यक्त करता है जिनसे महत्त्वपूर्ण विचार-विमर्श व सुझाव प्राप्त हुए।

निर्देश

1. गोस्लिंग, जे. टी., मैक्मास, डी. जे., फीलिप्स, जे. एल., तथा बामें, जे. जे. : जर्न. जियोफिजिकल रिसर्च, 1991, 96 क्रं. A5, 7831.

2. श्रीवास्तव, पी. के. : प्रोसीडिंग, 27वीं अन्तर्राष्ट्रीय अंतरिक्ष किरण संगोष्ठी, हेम्बुर्ग, जर्मनी 2001, 8, 3425.

3. गोल्सिंग, जे. टी. : जर्न. जियोफिजिकल रिसर्च, 1993, 98, 18937.

4. कौशिक, एस. सी. तथा श्रीवास्तव, पी. के. : विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका 1999, 42 (3) 159.

5. श्रीवास्तव, पी. के. तथा शुक्ला, आर. पी. : सोलर फिजिक्स, 1994, 154, 177.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 4, October 2002.

आर्गेनोफास्फेट कीटनाशकों का क्लोर ऐमीन-टी अभिकर्मक द्वारा परिमापन

अशोक तिवारी तथा ईश्वर चन्द्र शुक्ल
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद (उ. प्र.)

[प्राप्त — मई 24, 2002]

सारांश

इस शोधपत्र में कुछ आर्गेनोफास्फेट कीटनाशकों के मिलीग्राम परिमापन हेतु क्लोर ऐमीन टी का उपयोग करते हुए द्रुत तथा कृषि सुविधाजनक विधि का वर्णन किया गया है। आर्गेनोफास्फेट यौगिकों के 1-5 मिलीग्राम को कमरे के ताप (27°C) पर ग्लैशियल ऐसीटिक अम्ल की उपस्थिति में 0.1 N क्लोरऐमीन-टी अभिकर्मक के आधिक्य से 10 मिनट तक अभिक्रिया करायी जाती है। अभिक्रिया की समाप्ति के बाद अनप्रयुक्त अभिकर्मक को मानकीकृत 0.1 N सोडियम थायोसल्फेट विलयन के साथ स्टार्चसूचक की सहायता से अनुमापित किया जाता है। प्रयुक्त अभिकर्मक द्वारा कीटनाशकों की मात्रा का आकलन किया जाता है। इस विधि का उपयोग मैलाथियान, डाइमेथोएट, ईथायन तथा फोरेट यौगिकों के मानक तथा उनके सूत्रण नमूनों के परिमापन में किया गया है। इस विधि द्वारा प्राप्त परिणाम ± 1.0% त्रुटि के अन्दर हैं।

Abstract

Estimation of some organophosphate insecticides with chloramine-T reagent. *By.* Ashok Kumar Tiwari and Ishwar Chandra Shukla, Department of Chemistry, University of Allahabad. Allahabad (U.P.).

A quick and convenient method using Chloramine-T reagent has been developed for the estimation of some organophosphate insecticides. Aliquots containing 1-5 mg of the sample are allowed to react with a calculated excess of 0.1 N Chloramine-T reagent in the presence of

glacial acetic acid for 10 minutes at room temperature (27°C). After the reaction is over, the unconsumed reagent is back titrated with standardised 0.1 N solution of sodium thiosulphate to starch end point. The method is applied for the estimation of malation, dimethoate, ethion and phorate in technical preparations and their formulations. The results are within the error ± 1.0%.

आर्गेनोफास्फेट यौगिकों को घरेलू बागबानी, सब्जियों तथा फलों में नाशक जीवों तथा नाशक रोगों के नियंत्रण हेतु विशेष रूप से प्रयुक्त किया जाता है। इन यौगिकों की कीटनाशी तथा पीड़कनाशी (महामारी नाशक) उपयोगिताओं के कारण इनके परिमापन के लिए द्रव वर्णलेखी[1], विभवमूलक[2], द्रव्यमान स्पेक्ट्रममितीय[3], गैस वर्ण लेखी[4-6] तथा उच्च निष्पादन द्रव वर्ण लेखी[7] विधियाँ प्रयुक्त की जा चुकी हैं।

प्रस्तुत शोधपत्र में कुछ आर्गेनोफास्फेट कीटनाशकों के मिलीग्राम परिमापन के लिए एक साधारण अनुमापनी विधि का वर्णन किया जा रहा है। इस विधि से मैलाथियन, डाइमेथोएट, ईथियान तथा फोरेट यौगिकों के मानक तथा उनके सूत्रण नमूनों का अम्लीय माध्यम में क्लोरऐमीन-टी अभिकर्मक द्वारा परिमापन किया गया है।

प्रयोगात्मक

अभिकर्मक और विलयन : क्लोरऐमीन-टी विलयन 0.1 N) :— 7.0425 ग्राम क्लोरऐमीन-टी (मे तथा बोकर) अभिकर्मक तौल कर 250 मिली. आयतनी फ्लास्क में आसुत जल द्वारा घोला गया। प्राप्त विलयन को मानकीकृत 0.1 N सोडियम थायोसल्फेट विलयन से आयोडोमिति विधि द्वारा अनुमानित करके अभिकर्मक का मानकीकृत विलयन प्राप्त किया गया।

सोडियम थायोसल्फेट विलयन (0.1 N) : 24.8180 ग्राम सोडियम थायोसल्फेट (बी. डी. एच.) को 1000 मिली आयतनी फ्लास्क में आसुत जल द्वारा घोलकर विलयन को प्रारम्भिक कॉपर सल्फेट के मानकीकृत विलयन से आयोडोमिति विधि द्वारा अनुमानित करके मानकीकृत विलयन प्राप्त किया गया।

कापर सल्फेट विलयन (0.1 N) : 6.2425 ग्राम कॉपर सल्फेट (जी. आर.) को 250 मिली आयतनी फ्लास्क में आसुत जल से घोलकर विलयन बनाया गया। इस विलयन में तनु सल्फ्यूरिक अम्ल की अल्प मात्रा (5 मिली) मिलाई गई जिससे जलअपघटन न हो।

पोटैशियम आयोडाइड (10%) एवं स्टार्च (2%) के भी जलीय विलयन तैयार किये गये। ग्लैशियल ऐसीटिक अम्ल (मर्क) बिना किसी तनुता के प्रयुक्त किया गया।

मानक तथा सूत्रण नमूनों का विलयन : आर्गेनोफास्फेट कीटनाशकों के मानक नमूनों का विलयन बनाने के लिए नमूनों के 100 मिलीग्राम को एक छोटे बीकर में ग्लैशियल ऐसीटिक अम्ल की थोड़ी मात्रा (10 मिली) में घोला गया। विलयन को 100 मिली के आयतनी फ्लास्क में स्थानान्तरित

करके विलायक द्वारा बीकर को धोकर आयतनी फ्लास्क में मिलाया तथा ग्लैशियल ऐसीटिक अम्ल द्वारा ही विलयन को 100 मिली की तनुता तक बनाया गया। इस प्रकार प्राप्त विलयन मानक नमूने का 1 मिग्रा/मिली (अनुमानतः) सान्द्रता का विलयन तैयार हो जाता है।

इसी प्रकार सूत्रण नमूनों के स्टाक विलयन बनाये गये। सूत्रण नमूनों की 100 मिग्रा मात्रा एक छोटे बीकर में ग्लैशियल ऐसीटिक अम्ल की थोड़ी मात्रा में घोली गई। विलयन को भारात्मक फिल्टर पत्र द्वारा 100 मिली के आयतनी फ्लास्क में छानकर अविलेय भाग को तिरस्कृत कर दिया गया। फिल्टर पत्र और कीप को विलायक द्वारा धोकर आयतनी फ्लास्क में स्थानान्तरित किया गया तथा ग्लैशियल ऐसीटिक अम्ल द्वारा ही विलयन को 100 मिली तक तनु करके 1 मिग्रा/मिली (अनुमानतः) की सान्द्रता का विलयन बनाया गया है।

विधि : नमूने के 1-5 मिलीग्राम संखंड को 100 मिली के फ्लास्क में लेकर 5 मिली 0.1 N क्लोरऐमीन-टी अभिकर्मक तथा 5 मिली. ग्लैशियल ऐसीटिक अम्ल मिलाया गया। फ्लास्क की डाट बन्द करके मिश्रण को पूर्णतया हिला करके कमरे के ताप (25-27°C) पर आवश्यक समय तक अभिक्रिया हेतु रखा गया। अभिक्रिया की समाप्ति के बाद फ्लास्क की आन्तरिक दीवार को 2 मिली ग्लैशियल ऐसीटिक अम्ल द्वारा धोकर पूर्णतया हिलाया गया। इस अभिक्रिया मिश्रण में 5 मिली पोटैशियम आयोडाइड (10%) विलयन मिलाकर एक मिनट तक रखा, फिर अभिक्रिया मिश्रण को 0.1 N सोडियम थायोसल्फेट विलयन के सापेक्ष स्टार्च सूचक की सहायता से अनुमापित किया गया। समान परिस्थिति में एक रिक्त (Blank) प्रयोग भी किया गया जिसमें नमूने को छोड़कर सभी अभिकर्मक प्रयुक्त किये गये।

$$\text{नमूने की मिलीग्राम में मात्रा} = \frac{MN(B - S)}{2n}$$

जहाँ,

M = नमूने का अणुभार

N = सोडियम थायोसल्फेट विलयन की नार्मलता

B = रिक्त प्रयोग में सोडियम थायोसल्फेट विलयन का आयतन

S = वास्तविक प्रयोग में सोडियम थायोसल्फेट विलयन का आयतन

n = नमूने के एक मोल हेतु प्रयुक्त क्लोरामाइन-टी के मोलों की संख्या

परिणाम तथा विवेचना

अभिक्रिया हेतु उचित परिस्थिति निर्धारण के लिए समय, अभिकर्मक की सान्द्रता एवं मात्रा तथा ताप का अध्ययन किया जाता है। सर्वप्रथम अभिक्रिया के उचित समय का निर्धारण किया गया। इस अध्ययन में यह पाया गया कि मैलाथियान, डाइमेथोएट एवं फोरेट के मानक तथा सूत्रण

सारणी 1

आर्गेनोफास्फेट कीटनाशकों के मानक तथा उनके सूत्रण नमूनों का अम्लीय माध्यम में क्लोर ऐमीन-टी अभिकर्मक द्वारा परिमापन

क्र० सं०	नमूने	संखंड (मिली)	उपास्थित मात्रा (मिग्रा०)	आभिक्रिया समय (मिनट)	आकलन द्वारा प्राप्त मात्रा (मिग्रा)	स्टाइकियोमेट्री	त्रुटि (%)	मानक विचलन (SD)	विचरण गुणांक (C.V.) (%)
1.	मैलाथियान मानक (95%)	1.0	0.95	10	0.9410	2	–0.95	0.00016	0.0170
		3.0	2.85		2.8291		–0.73	0.00036	0.0127
		5.0	4.75		4.7279		–0.46	0.00081	0.0171
(c)	मैलाथियान ई० सी० (50 %)	1.0	0.50	10	0.4952	2	–0.96	0.00020	0.0404
		3.0	1.50		1.4885		–0.77	0.00051	0.0343
		5.0	2.50		2.4890		–0.44	0.00080	0.0321
(b)	मैलाथियान डब्लू० पी० (25%)	1.0	0.25	10	0.2478	2	–0.88	0.00025	0.1009
		3.0	0.75		0.7442		–0.77	0.00045	0.0605
		5.0	1.25		1.2444		–0.45	0.00078	0.0627
2.	डाइमेथोएट मानक (90 %)	1.0	0.90	10	0.8914	2	–0.95	0.00035	0.0393
		3.0	2.70		2.6788		–0.78	0.00085	0.0317
		5.0	4.50		4.4778		–0.49	0.00131	0.0293
(c)	डाइमेथोएट ई० सी० (20 %	1.0	0.20	10	0.1981	2	–0.95	0.00010	0.0505
		3.0	0.60		0.5959		–0.68	0.00041	0.0688
		5.0	1.00		0.9960		-0.40	0.00080	0.0803

सारणी 1 क्रमशः

सारणी 1 का शेष

क्र० सं०	नमूने	संखंड (मिली)	उपास्थित मात्रा (मिग्रा०)	आभिक्रिया समय (मिनट)	आकलन द्वारा प्राप्त मात्रा (मिग्रा)	स्टाइकियोमेट्री	त्रुटि (%)	मानक विचलन (SD)	विचरण गुणांक (C.V.) (%)
3.	ईथायन मानक (95%)	1.0	0.95	15	0.9408	4	–0.96	0.00025	0.0266
		3.0	2.85		2.8292		–0.73	0.00092	0.0325
		5.0	4.75		4.7269		–0.48	0.00182	0.0385
(a)	ईथायन ई० सी० (20%)	1.0	0.20	15	0.1982	4	–0.90	0.00016	0.0807
		3.0	0.60		0.5963		–0.62	0.00031	0.0519
		5.0	1.00		0.9965		–0.35	0.00050	0.0502
4.	फोरेट मानक (97%)	1.0	0.97	10	0.9609	2	–0.94	0.00020	0.0208
		3.0	2.91		2.8878		–0.76	0.00076	0.0263
		5.0	4.85		4.8271		–0.47	0.00110	0.0228
(a)	फोरेट ई० सी० (25%)	1.0	0.25	10	0.2478	2	–0.88	0.00020	0.0807
		3.0	0.75		0.7443		–0.76	0.00050	0.0672
		5.0	1.25		1.2431		–0.55	0.00076	0.0611

* प्रत्येक मान नौ परिमापित मानों का औसत है।

नमूनों के परिमापन में क्रमशः 10 मिनट तथा 15 मिनट का समय उपयुक्त है। अधिक समय तक अभिक्रिया कराने से भी प्राप्त परिणामों पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। कम समय तक अभिक्रिया कराने से अयथार्थ परिणाम प्राप्त होते हैं, क्योंकि कम समय में अभिक्रिया पूर्ण नहीं हो पाती।

आर्गेनोफास्फेट समूह के यौगिकों के परिमापन में क्लोरऐमीन-टी अभिकर्मक की सान्द्रता और मात्रा का अध्ययन भी किया गया। इस अध्ययन द्वारा 0.1 N सान्द्रता का अभिकर्मक अभिक्रिया हेतु उपयुक्त पाया गया। इससे कम और अधिक सान्द्रता का अभिकर्मक अयथार्थ परिणाम प्रदान करता है। इसी प्रकार अभिकर्मक की मात्रा के प्रभाव का भी अध्ययन किया गया तथा यह पाया गया कि इसकी 5 मिली. मात्रा अभिक्रिया हेतु पर्याप्त है। अभिकर्मक की मात्रा कम होने से अभिक्रिया अपूर्ण रहती है तथा अत्यधिक होने से अभिकर्मक का ह्रास होता है।

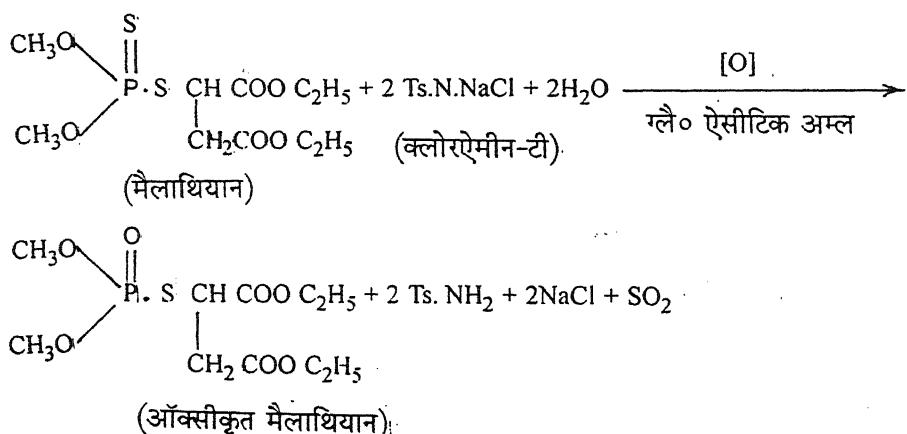
अभिक्रिया पर ताप के अध्ययन से पाया गया कि सामान्य ताप (25°C – 27°C) ही उचित है। कम (0°C से 20°C) पर अभिकर्मक का आयनीकरण अपूर्ण रहता है। अतः अभिक्रिया संपन्न न होने के कारण आकलन द्वारा यथार्थ से कम परिणाम प्राप्त होता है। इसी प्रकार ताप बढ़ाने पर भी अभिकर्मक विघटित हो जाता है, जिससे अशुद्ध परिणाम प्राप्त होते हैं।

उपर्युक्त अध्ययन द्वारा प्राप्त परिस्थितियों में आर्गेनोफास्फेट कीटनाशकों के परिमापन के परिणाम सारणी-1 में दिये गये हैं।

$$(CH_3O)_2P(=S)\cdot S\cdot CH(COOC_2H_5)CH_2COOC_2H_5 + 2\ Ts.N.NaCl + 2H_2O \xrightarrow[\text{ग्लै० ऐसीटिक अम्ल}]{[O]}$$

(मैलाथियान) (क्लोरऐमीन-टी)

$$(CH_3O)_2P(=O)\cdot S\ CH(COOC_2H_5)CH_2COOC_2H_5 + 2\ Ts.NH_2 + 2NaCl + SO_2$$

(ऑक्सीकृत मैलाथियान)

अभिक्रिया के अन्तर्गत सम्भावित क्रिया-विधि का अनुमान अभिकर्मक की क्रियाशीलता तथा आर्गेनोफास्फेट कीटनाशकों की संरचना एवं प्रयुक अभिकर्मक की स्टॉइकियोमेट्री को ध्यान में रखकर किया गया है। इस विषय पर उपलब्ध साहित्य तथा अभिक्रिया द्वारा प्राप्त उत्पादों के पृथक्करण एवं पहचान को आधार बनाया गया है। मैलाथियान की अभिक्रिया सम्पूर्ण होने में 10 मिनट का समय

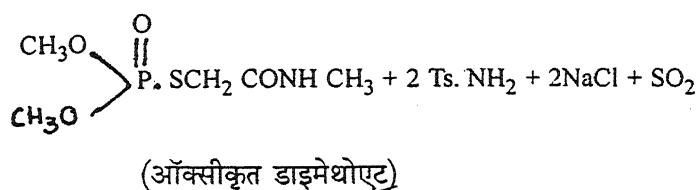
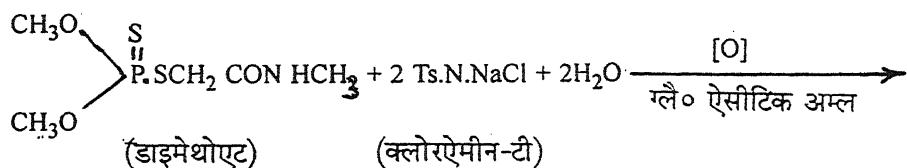
लगता है तथा अभिकर्मक के दो मोल प्रयुक्त होते हैं। यौगिक की संरचना को देखते हुए निम्न अभिक्रिया-विधि दी जा सकती है।

इसी प्रकार डाइमेथोएट की क्रियाविधि भी दर्शायी जा सकती है।

$$(CH_3O)_2\overset{S}{\overset{\|}{P}}.SCH_2\,CONHCH_3 + 2\,Ts.N.NaCl + 2H_2O \xrightarrow[\text{ग्लै० ऐसीटिक अम्ल}]{[O]}$$

(डाइमेथोएट) (क्लोरऐमीन-टी)

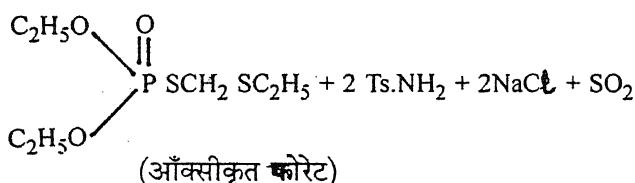
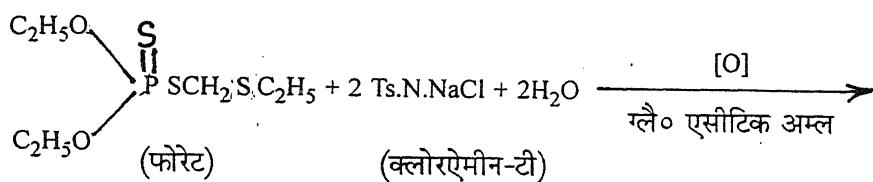
$$(CH_3O)_2\overset{O}{\overset{\|}{P}}.SCH_2\,CONH\,CH_3 + 2\,Ts.NH_2 + 2NaCl + SO_2$$

(ऑक्सीकृत डाइमेथोएट)

अगला कीटनाशी, जो कि संरचना में उपर्युक्त यौगिकों से मिलता जुलता है, उसकी भी क्रियाविधि निम्नवत् है—

$$(C_2H_5O)_2\overset{S}{\overset{\|}{P}}\,SCH_2\,S\,C_2H_5 + 2\,Ts.N.NaCl + 2H_2O \xrightarrow[\text{ग्लै० एसीटिक अम्ल}]{[O]}$$

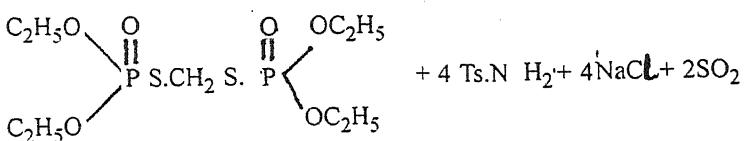
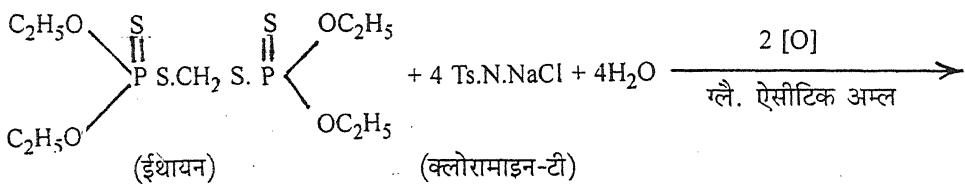
(फोरेट) (क्लोरऐमीन-टी)

$$(C_2H_5O)_2\overset{O}{\overset{\|}{P}}\,SCH_2\,SC_2H_5 + 2\,Ts.NH_2 + 2NaCl + SO_2$$

(ऑक्सीकृत फोरेट)

ईथायन की संरचना कुछ भिन्न है, अतः इसकी अभिक्रिया 15 मिनट में सम्पूर्ण होती है तथा अभिकर्मक के 4 मोल प्रयुक्त होते हैं। इसकी क्रियाविधि इस प्रकार है।

$$(C_2H_5O)_2P(=S)S.CH_2\,S.P(=S)(OC_2H_5)_2 + 4\ Ts.N.NaCl + 4H_2O \xrightarrow[\text{ग्लै. ऐसीटिक अम्ल}]{2\ [O]}$$

(ईथायन) (क्लोरामाइन-टी)

$$(C_2H_5O)_2P(=O)S.CH_2\,S.P(=O)(OC_2H_5)_2 + 4\ Ts.N\ H_2 + 4NaCl + 2SO_2$$

(ऑक्सीकृत ईथायन)

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय 'इंडिया पेस्टीसाइड्स लिमिटेड लखनऊ' के प्रति आभार प्रकट करते हैं जिन्होंने आर्गेनोफास्फेट कीटनाशकों के मानक तथा सूत्रण नमूनों को निःशुल्क प्रदान करके इस शोधकार्य को सफल बनाने में सहायता की।

निर्देश

1. मार्टी, जे. एल., मिओनेटो लैकोर्ट, एस. तथा बार्सेलो, डी. : Anal. Chim. Acta, 1995, 311 (3), 265-271.
2. रिस्टोरी, सी. डेल, सी. सी., मार्टिनी, एम., बार्बेरो, ए. तथा आन्कारानी, ए. : Anal. Chim. Acta, 1996, 325 (3), 151-160.
3. कोमोल प्रासेर्ट, वी., लासन, ए. आर. तथा हारग्रेव्स : J. Agric. Food Chem., 1995, 43 (8), 1963-1965.
4. ली, एक्स. पी., कुमाजावा, टी. साटो, के. तथा सुजुकी, ओ. : Chromatographia, 1996, 42 (3-4), 135-140.
5. मिलियाडिस, जी. ई. : Bull Environ. Contam. Toxicol. : 1995, 54 (6), 837-840.
6. गोमेज, सी. जी., आफक्के मार्टिनेज, एम. आई., रोमेरो, जे. एल. तथा निजकाया, एम. ए. : Bull. Environ. Contam. Toxical., 1995, 55 (3), 431-438.
7. वेनमोसा, ए., लाकौट, जे. एल., लोइसी, पी. आर. तथा माइको, एम. : Chromatographia, 1996, 42 (3-4), 177-180.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 4, October 2002.

तीन चरों वाले श्रीवास्तव के हाइपरज्यामितीय फलन के मूल अनुरूप के समापन हेतु कतिपय संकलन सूत्र

आर. के. सक्सेना तथा आर. के. गुप्त
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जय नारायण व्यास, विश्वविद्यालय जोधपुर (राज.)

[प्राप्त — अप्रैल 24, 2002]

सारांश

इस प्रपत्र में तीन चरों वाले श्रीवास्तव के हाइपरज्यामितीय फलन के मूल अनुरूप के समापन हेतु कतिपय संकलन सूत्रों को प्राप्त किया गया है।

Abstract

On certain summation formulae for terminating basic analogue of Srivastava's hypergeometric function of three variables. *By* R. K. Saxena and R. K. Gupta, Department of Mathematics and Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur (Raj.).

This paper deals with the derivation of certain summation formulae for terminating basic analogue of Srivastava's[14] hypergeometric function of three variables which provides an elegant generalization of certain results due to Denis.[5]

1. प्रस्तावना

हाल ही में सरन[8] ने सार्वीकृत कैम्पे द फेरी श्रेणी के समापन के लिए कुछ ज्ञात परिणामों की स्थापना की है जिनमें कार्लिट्ज[4], सरन[7] तथा सिंघल[8] के ज्ञात परिणाम सम्मिलित हैं। इस प्रपत्र में तीन चरों वाले श्रीवास्तव के हाइपरज्यामितीय फलन के मूल अनुरूप के समापन हेतु कुछ परिणामों को स्थापित करने का प्रयास किया गया है।

इन परिणामों से तीन चरों वाले श्रीवास्तव के हाइपरज्यामितीय फलन के मूल अनुरूप पर नाना प्रकार के संकलनों को निगमित किया जा सकता है।

2. संकेतन तथा परिभाषाएं

इस प्रपत्र में सर्वत्र निम्नांकित संकेतनों तथा परिभाषाओं को व्यवहृत किया जावेगा।

$$[a;q]_n = (1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right)\cdots\left(1-aq^{n-1}\right)$$

$$[a;q]_0 = 1,\ |q| < 1$$

वास्तविक या संमिश्र के समस्त मानों के लिए। यही नहीं, प्राचल (a) से A-प्राचलों $a_1, a_2, a_2, \ldots a_A$ का अनुक्रम सूचित होता है तथा A = 0 प्राचलों की अनुपस्थिति सूचित करता है

तथा $\pi\left[\begin{matrix} a; \\ b; \end{matrix}\ q\right]$ का उपयोग

$$\overset{\infty}{\underset{n=0}{\pi}} \frac{(1-aq^n)}{(1-bq^n)}$$ को सूचित करने के लिए किया जावेगा।

तीन चरों वाले श्रीवास्तव के हाइपरज्यामितीय फलन के मूल अनुरूप को श्रीवास्तव ने निम्न रूप में परिभाषित किया है। (देखें श्रीवास्तव तथा कार्लसन पृष्ठ 44 भी)।

$$\phi(3)\left[\begin{matrix} (a) :: (b); (c); (d) : (e); (f); (g); q, x, y, z \\ (a') :: (b'); (c'); (d') : (e'); (f'); (g'); q^{\lambda} \end{matrix}\right]$$

$$= \sum_{m,n,p \geq 0} \frac{[(a);q]_{m+n+p}\,[(b);q]_{m+n}\,[(c);q]_{n+p}\,[(d);q]_{p+m}}{[(a');q]_{m+n+p}\,[(b');q]_{m+n}\,[(c');q]_{n+p}\,[(d');q]_{p+m}}$$

$$\times \frac{[(e);q]_m\,[(f);q]_n\,[(g);q]_p\,x^m y^n z^p q^{\lambda p(p+1)/2}}{[(e');q]_m\,[(f');q]_n\,[(g');q]_p\,[q;q]_m[q;q]_n[q;q]_p}$$

$$(|x|, |y|, |z|, |q| < 1) \tag{2.1}$$

जहाँ $\lambda > 0$, $|x|, |y|, |z|, |q| < 1$ जब $\lambda = 0$ तो हम $\phi(3)$ संकेतन से q^{λ} को छोड़ देते हैं।

सार्वीकृत मूल हाइपरज्यामितीय फलन को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है—

$$ {}_A\phi_B\left[\begin{matrix}(a)\,;\ q,\ z\\ (b)\,;\ q^{\lambda}\end{matrix}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(a)\,;\ q]_n\ z^n\ q^{\lambda n(n+1)/2}}{[(b)\,;\ q]_n\ [q\,;\ q]_n} \tag{2.2}$$

जहां $\lambda > 0$ या $|z| < 1$ जब $\lambda = 0$ जिस दशा में हम सामान्य मूल हाइपरज्यामितीय फलन प्राप्त कर सकते हैं और जब ϕ संकेतन से संकेत q^{λ} को छोड़ सकते हैं।

परिणामों की स्थापना हेतु निम्नांकित संकलन सूत्रों की आवश्यकता पड़ेगी—

$$ {}_3\phi_2\left[a,\ b,\ q^{-n}\,;\ c,\ abq^{1-n}/c\,;\ q,\ q\right]$$

$$=\frac{[c/a\,;\ q]_n\ [c/b\,;\ q]_n}{[c\,;\ q]_n\ [c/ab\,;\ q]_n} \tag{2.3}$$

$$ {}_5\phi_4\left[\begin{matrix}a,\ q\sqrt{a},\ -q\sqrt{a},\ b,\ q^{-m}\,;\ q,\ q\\ \sqrt{a},\ -\sqrt{a},\ qa/b,\ b^2q^{2-m}\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{[a/qb^2\,;\ q]_m\ [1/qb\,;\ q]_m\ [a/b^2\,;\ q]_{2m}}{[qa/b\,;\ q]_m\ [1/qb^2\,;\ q]_m\ [a/qb^2\,;\ q]_{2m}} \tag{2.4}$$

आगे जो कुछ दिया जा रहा है, उसमें अन्य संकेतों के अर्थ पूर्ववत् होंगे जब तक कोई उल्लेख न किया गया हो।

3. मुख्य परिणाम

इस अनुभाग में हम निम्नांकित सामान्य परिणामों की स्थापना करेंगे—

$$\phi^{(3)}\left[\begin{matrix}q^{-m}\ ::\ (b')\,;\ \gamma q^{m}/\alpha,\ \gamma q^{m}/\beta,\ (c)\,;\ (d')\ :\ \alpha,\ \beta\,;\ (f)\,;\ (g)\,;\ q,\ q,\ y,\ z\\ \gamma q^{m}\ ::\ (b')\,;\ \gamma q^{m}/\alpha\beta,\ (c')\,;\ (d')\ :\ q^{1-2m}\,\alpha\beta/\gamma\,;\ (f')\,;\ (g')\,;\ q^{\gamma}\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{[\gamma/\alpha ; q]_{2m} [\gamma/\beta ; q]_{2m} [\gamma ; q]_m [\nu/\alpha\beta ; q]_m}{[\gamma ; q]_{2m} [\gamma/\alpha\beta ; q]_{2m} [\gamma/\alpha ; q]_m [\gamma/\beta ; q]_m}$$

$$\times \left[\begin{matrix} (c), q^{-m} : (f) ; (g) ; q, y, z \\ (c') : (f') ; (g') ; q^{\gamma} \end{matrix} \right] \tag{3.1}$$

$$\phi^{(3)} \left[\begin{matrix} q^{-m} :: (b') ; q^2/\beta ; q^{m+2} \beta^2/\alpha, (c), \left\{ q\beta^2/\alpha, q^2 \beta 2/\alpha \right\} ; (d') : \\ q^{m+2} \beta^2 :: (b') ; \beta/\alpha, (c'), \left\{ \beta^2 q^2/\alpha' ; \beta^2 q^2/\alpha \right\} ; (d') : \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha, q\sqrt{\alpha}, -q\sqrt{\alpha}, \beta q^m ; (f) ; (g) ; q, q, y, z \\ \sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha}, q^{1-m} \alpha/\beta ; (f') ; (g') ; q^{\lambda} \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{\left| q\beta^2/\alpha ; q \right|_{2m} \left| \beta q^2 ; q \right|_m \left| \beta^2 q^2 ; q \right|_m}{\left| q^2 \beta^2/\alpha ; q \right|_m \left| \beta/\alpha ; q \right|_m \left| q^2 \beta^2 ; q \right|_{2m}}$$

$$\times \phi \left[\begin{matrix} (c), q^{-m} : (f) ; (g) ; q, y, z \\ (c') : (f') ; (g') ; q^{\lambda} \end{matrix} \right] \tag{3.2}$$

(मझले कोष्ठकों में दिए गये प्राचल आधार q2 पर हैं)

(3.1) को सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि इसके वाम पक्ष को निम्नवत् लिखा जा सकता है—

$$\sum_{s, t \geq 0} \frac{\left| q^{-m} ; q \right|_{s+t} \left| \gamma q^m/\alpha ; q \right|_{s+t} \left| \gamma q^m/\beta ; q \right|_{s+t}}{\left[\gamma q^m ; q \right]_{s+t} \left[\nu q^m/\alpha\beta ; q \right]_{s+t} \left[(c') ; q \right]_{s+t}}$$

$$\times \frac{[(f); q]_s [(g); q]_t y^s z^t q^{\lambda t(t+1)/2}}{[(f'); q]_s [(g'); q]_t [q; q]_s [q; q]_t}$$

$$\times {}_3\phi_2\left[\alpha, \beta, q^{-m+s+t}; \gamma q^{m+s+t}, q^{1-2m}; \alpha\beta/\gamma; q, q\right]$$

अब आन्तरिक सालशुत्सियन 3 ϕ_2 (स्लेटर 1966, IV, 4, p. 24) का मान ज्ञात करने पर हमें (3.1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है। इससे (3.1) सिद्ध होता है। (3.2) की उपपत्ति को (2.4) की ही तरह विकसित किया जा सकता है। इसके पूर्व डेनिस[5] द्वारा दिये गये परिणामों को (3.1) तथा (3.2) में $c = c'$, $f = b$, $f' = c$ मान कर $Z \to 0$ बनाकर प्राप्त किया जा सकता है।

निर्देश

1. ऐंड्रूज, जी. ई. : SIAM Review 1974, 61, 441-484.
2. वही. : Problems and Prospects for Basic Hypergeometric Functions. In Theory and Application of Special Functions, ed. R.A. Askey (Academic Press), New York, 1975.
3. बैली, डब्लू. एन. : Jour. London Math. Soc. 1947, 22, 237-240.
4. कार्लिट्ज, एल. : Rendi, Sem. Math. Univ. Padova, 1967, 37, 230-233.
5. डेनिस, आर. वाई. : J. Indian Acad. Math. 1988, 10 (2), 64-67.
6. जैक्सन, एफ. एच. : Quart. J. Math. (Oxford) 1942, 13, 69-82.
7. सरन, एस. : Indian J. Pure Appl. Math. 1980, 11, 41-46.
8. वही. : Indian J. Pure Appl. Math 1982, 13, 1132-1135.
9. सक्सेना, आर. के. तथा गुप्ता, आर. के. : Indian J. Pure appl. Math. 1990, 21, 574-581.
10. वही. : Indian J. Pure appl. Math. 1990, 21, 1009-1013.
11. सियर्स, डी. बी. : Proc. Lond. Math. Soc. 1951, 52, 467-483.
12. सिंघल, पी. बी. : Indian J. Pure appl. Math. 1971, 2, 610-614.
13. स्लेटर, एल. जे. : Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, Cambridge, London and New York, 1966.
14. श्रीवास्तव, एच. एम. : Proc. Cambridge Phil. Soc. 1967, 63, 425-429.
15. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा कार्लसन, पी. डब्लू. : Multiple Gaussian Hypergeometric Series, John Wiley and Sons, Yew York, Chichester, Brisbane and Toranto, 1985.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 4, October 2002.

चने के मूल ग्रन्थि रोग तथा मूल परिवेशी मृदा पर विभिन्न पत्तियों के अर्क का प्रभाव

गोपाल पाण्डेय, राजेश कुमार पाण्डेय तथा हेमलता पन्त
बायोवेद शोध एवम् प्रसार केन्द्र, 103/42 मोती लाल नेहरू मार्ग, इलाहाबाद (उ. प्र.)

[प्राप्त — जून 20, 2001]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में चने पर लगने वाले मूल ग्रन्थि रोग पर नीम, गेंदा तथा धतूरा की पत्तियों के अर्क की विभिन्न सांद्रताओं के साथ मूलग्रन्थि रोग के निदान के लिये प्रयोग किये गये। यह पाया गया कि सभी अर्क मूलग्रन्थि रोग की रोकथाम में सहायक थे। इनमें से सबसे अच्छा प्रभाव नीम की पत्तियों के अर्क (100%) का रहा, फिर क्रमशः गेंदे की पत्तियों का अर्क (100%), नीम अर्क (50%), गेंदा अर्क (50%), धतूरा की पत्तियों का अर्क (100%) तथा धतूरे अर्क (50%) का (दोनों प्रयोग गमला एवम् खेत में) था। सबसे ज्यादा फली की संख्या नीम अर्क (100%) में थी। नीम के अर्क (100%) से चने के पौधों की वृद्धि एवम् उपज सबसे अधिक देखी गयी। खेत में सबसे अधिक मूल-परिवेशी फफूँदी की संख्या नीम अर्क (100%) में थी। नीम अर्क (100%) से राइजोबियम तथा ऐजोटोबैक्टर जीवाणुओं की संख्या सबसे अधिक थी।

Abstract

Effect of different plant extracts of different concentrations on root-knot nematode and its rhizosphere soil in chick pea (cicer-arietinum L.) *By* Gopal Pandey, Rajesh Kumar Pandey and Hemlata Pant, Bioved Research and Communication centre, 103/42, M.L.N. Road, Allahabad, U.P.

Present study deals with the effect of different plant extracts on the root-knot nematode in chickpea. For the purpose, different leaf extracts viz. neem, marigold and dhatura leaf extracts of two

concentrations (100 % and 50%) were used.

All the leaf extracts were found effective for the control of root-knot nematode. Better performance was noted with neem leaf extract (100%) followed by marigold leaf extract (100%), neem extract (50%), marigold extract (50%), dhatura extract (100%) and dhatura extract (50%). Higher number of pods were recorded where neem extract (100%) was used. Higher growth parameters and maximum amount of yield were recorded with neem extract (100%). Higher number of Rhizosphere fungi, Rhizobium and Azotobacter bacteria were recorded with neem extract (100%) under field conditions.

चना मुख्य दलहनी फसल है। इसकी खेती लगभग 72 लाख हेक्टेयर क्षेत्रफल में की जाती है तथा इसका वार्षिक उत्पादन 50 लाख टन है। चना में प्रचुर मात्रा में प्रोटीन पाया जाता है, जो अन्य अनाजों में पाये जाने वाले प्रोटीन से 2-3 गुना अधिक है। हमारे देश में माँग के हिसाब से पैदावार कम हो रही है। चने का उत्पादन कम होने का मुख्य कारण कीट-व्याधियों का अधिक प्रकोप एवम् चने की जोत के क्षेत्रफल में कमी है। चने की जड़ों में मूलग्रन्थि रोग का प्रकोप ज्यादा होता है जिससे चने की पैदावार में कमी आती है।[8, 9] विश्व स्तर पर चने में पादप परजीवी सूत्रकृमि से 13.7% की हानि होती है।[1]

रासायनिक कीटनाशकों के प्रयोग से पादप रोगों की रोकथाम महँगी पड़ती है तथा इससे पर्यावरण प्रदूषित होता है। इसके विकल्प के रूप में हरी खाद, विभिन्न प्रकार की खलियाँ, वानस्पतिक कीटनाशी तथा जैव नियंत्रक कारकों का प्रयोग उपयुक्त होता है। इस दिशा में कुछ वैज्ञानिकों को सार्थक परिणाम प्राप्त हुये हैं।[18, 9, 6, 10, 11] इसी को ध्यान में रखते हुये हमने चने के मूल ग्रन्थि रोग तथा मूल परिवेश मृदा पर विभिन्न पत्तियों के अर्क की विभिन्न सान्द्रताओं के प्रभाव का अध्ययन किया।

प्रयोगात्मक

यह प्रयोग बायोवेद शोध फार्म इलाहाबाद में गमलों तथा सूक्ष्म भूखण्डों में 2001-2002 में किया गया। विभिन्न पत्तियों जैसे नीम, गेंदा और धतूरा के अर्क को बायोवेद प्रयोगशाला में अर्क की मशीन (एक्सट्रैक्ट यूनिट) से निकाला गया तथा इन अर्कों को 100% और 50% की सांद्रता बनाकर प्रयोग किया गया। 35 गमलों (6 इंच व्यास के) तथा 7 सूक्ष्म भूखण्डों (1 × 1मी०) को प्रयोग के लिये तैयार किया गया। सभी गमलों को फार्मलीन (4%) से निर्जर्मित करके उनमें निर्जर्मीकृत मृदा भर दी गयी। चने की टाइप-3 प्रजातियों के बीजों को (4 बीज प्रति गमला एवम् भूखण्ड में) बो दिया गया। सात दिनों के बाद तीन पौधे उखाड़ दिये गये और एक पौधा प्रति गमला एवम् भूखण्ड में छोड़ दिया गया। बुआई के दस दिन बाद मूलग्रन्थियों से निकाले गये सूत्रकृमियों (मिलैडोगाइन इनकागनिटा) के तरुणों (जूवेनाइल्स) को 1000 तरुण प्रति पौधे प्रति गमले तथा सूक्ष्म भूखण्ड के हिसाब से तथा पत्तियों का अर्क 100% एवम् 50% सांद्रता के हिसाब से निवेशित किया गया।

मूलपरिवेश में पाये जाने वाले मृदाकवक, राइजोबियम एवम् ऐजोटोबैक्टर जीवाणुओं को जैनसन इत्यादि की विधि से विलगित किया गया। सूक्ष्म भूखण्डों से प्राप्त मृदा में सूत्रकृमियों का विश्लेषण साउथी विधि के द्वारा किया गया। जब फसल पकने के करीब हुई तो पौधों के वृद्धि मानकों, फली की संख्या, उपज, मूल ग्रन्थि की संख्या, ग्रन्थिका की संख्या, मूलपरिवेश में पाये जाने वाले कवक तथा जीवाणु की संख्या का निरीक्षण किया गया। सांख्यिकी गणना का विश्लेषण आर. बी. डी. विधि से किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

दिये गये आकड़ों से यह परिणाम निकलता है कि विभिन्न पत्तियों के अर्क के प्रयोग से चने के पौधों की वृद्धि एवम् उपज प्रभावी रूप से बढ़ जाती है और मूल ग्रन्थि रोग का नियंत्रण सार्थक रूप से होता है। नीम की पत्ती के अर्क (100%) के प्रयोग से चने की वृद्धि एवं पैदावार सबसे अधिक हुई। इसका मुख्य कारण पौधों में तीव्र उपापचय की क्रिया सूत्रकृमियों की संख्या का घटना या मृदा में लाभदायक जीवाणुओं (राइजोबियम, ऐजोटोबैक्टर) की वृद्धि का होना है एवं मृदा में पोषक तत्वों की मात्रा का बढ़ना है।[9]

नीम की पत्ती के अर्क (100%) के प्रयोग से सबसे कम मूलग्रन्थियों की संख्या पायी गयी जिसका मुख्य कारण प्रत्यक्ष आविषालुता (**Direct toxecity**) का स्रावण हो सकता है या नीम की पत्ती के अर्क के अपघटन द्वारा मृदा से निकलने वाले आविषालु रसायनों (टॉक्सिक केमिकल) का स्रावण है। नीम के बाद क्रमशः गेंदे की पत्ती के अर्क (100%) का भी परिणाम सार्थक था, जिसका मुख्य कारण गेंदे के अर्क से निकलने वाले तत्व हैं जो सूत्रकृमियों को रुचिकर नहीं लगते। इसी प्रकार का परीक्षण अन्य वैज्ञानिकों ने किया[2, 5, 7] तो उन्होंने यह पाया कि नीम की पत्ती, नीम की खली, नीम की पत्ती का अर्क प्रयोग करने पर मूलपरिवेश के कवकों की संख्या में वृद्धि है किन्तु राइजोबियम तथा जीवाणुओं की संख्या में सार्थक वृद्धि होती है। इसका मुख्य कारण कवकों तथा जीवाणुओं को पर्याप्त मात्रा में पोषण तथा ऊर्जा प्राप्त होना है। ऐसे ही परिणाम अन्य वैज्ञानिकों द्वारा भी प्राप्त किये गये।[4, 9, 11, 13]

मूलपरिवेश मृदा में पाये जाने वाले पादप परजीवी सूत्रकृमियों की संख्या प्रयोग में लायी गयी सभी पौधों की पत्तियों के अर्क के प्रभाव में कम पायी गयी जिसका मुख्य कारण पत्तियों के अर्क से निकलने वाले आविषालु रसायनों का प्रभाव, या मृदा में पादप परभक्षी सूत्रकृमियों एवम् सूत्रकृमि विरोधी कवकों की संख्या में वृद्धि है। इसी तरह के प्रयोग अन्य वैज्ञानिकों द्वारा किये गये हैं।[5, 18, 16, 9]

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण विज्ञान एवम् प्रौद्योगिकी विभाग, नई दिल्ली, भारत सरकार द्वारा वित्तीय सहयोग के लिए आभार व्यक्त करते हैं।

सारणी 1 *विभिन्न पत्तियों के अर्क उपचार का चने की फसल पर प्रभाव*

(यह प्रयोग गमले में किया गया)

उपचार	पी. एच.	आर्द्रता (प्रति. में)	तने का भार (ग्राम में)	तने की लम्बाई (सेमी. में)	जड़ का भार (ग्राम में)	जड़ की लम्बाई (सेमी.)	ग्रन्थियों की संख्या	मूल ग्रंथियों की संख्या	फलियों की संख्या	उपज (ग्राम में)
नीम की पत्ती का अर्क (50%)	7.302	7.88	29.6	35.2	34.8	31.4	16	45.8	40.2	5.74
नीम की पत्ती का अर्क (100%)	7.14	8.26	50.2	50.4	45.6	37.6	8.4	7.3	6.2	7.46
गेंदे की पत्ती का अर्क (50%)	7.802	7.9	33	31.8	33.2	30.4	21.8	40.2	35.4	4.2548
गेंदे की पत्ती का अर्क (100%)	7.238	8.26	46.6	47.6	43.4	35.4	10	73.2	47.8	5.86
धतूरा की पत्ती का अर्क (50%)	7.554	6.19	22.2	24.6	28	20.2	62	31.4	25	3
धतूरा की पत्ती का अर्क (100%)	7.38	6.85	27.4	29.4	30.6	27.6	50.8	57.8	33.4	4.008
नियन्त्रण	8.344	5.08	14.8	16	19.6	16.8	85.6	28.4	12.8	1.536
एफ परीक्षण (P = 0.05)	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक
मानक विचलन (सी. डी.) (P = 0.05)	0.23049	4.8366	2.1618	2.3783	2.30147	2.6799	8.0872	6.1867	5.327049	0.6385

सारणी 2 : *विभिन्न पत्तियों के अर्क उपचार का चने की फसल तथा जीवाणुओं की संख्या पर प्रभाव*
(यह प्रयोग फार्म पर किया गया)

उपचार	पी. एच.	मृदा आर्द्रता (प्रति. में)	तने का भार (ग्राम में)	तने की लम्बाई (सेमी. में)	जड़ का भार (ग्राम में)	जड़ की लम्बाई (सेमी.)	ग्रन्थियों की संख्या	मूल ग्रंथियों की संख्या	फलियों की संख्या	उपज (ग्राम में)	राइजो बियम	ऐजोटो बैक्टर
नीम की पत्ती का अर्क (50%)	7.48	8.48	33.6	35.4	36.2	32.6	13.4	47.4	37.4	4.488	425	85
नीम की पत्ती का अर्क (100%)	7.13	9.92	99.4	51.8	46.4	38.6	5.8	77.8	60	7.2	445	125
गेंदे की पत्ती का अर्क (50%)	7.57	8.36	30.2	33	34.2	31.6	19.6	43	35.4	4.248	412	66.26
गेंदे की पत्ती का अर्क (100%)	7.17	9.48	47.4	51.2	44.6	36.4	7.8	76	50.4	6.048	438	116.6
धतूरा की पत्ती का अर्क (50%)	7.76	6.96	23.4	26.6	28.8	21.4	41.8	37.4	26.6	3.192	230.4	44.52
धतूरा की पत्ती का अर्क (100%)	7.52	7.44	29	30.2	32.6	28.8	31	60.6	34	4.08	338.4	86
नियन्त्रण	8.178	6.54	19.4	18.6	22	18.4	66.2	22	14.6	1.752	185	40
एफ परीक्षण (P = 0.05)	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक
मानक विचलन (सी. डी.) (P = 0.05)	0.1820301	0.623	2.4636	3.162112	2.	2.9348	4.116	6.3424	4.9187	.6124	—	5.37

सारणी 2 (क)

चने के मूलपरिवेश में कवकों की संख्या (10^3/ग्राम मृदा)

कवक का नाम	नीम की पत्ती का अर्क (50%)	नीम की पत्ती का अर्क (100%)	गेंदे की पत्ती का अर्क (५०%)	गेंदे की पत्ती का अर्क (१००%)	धतूरे की पत्ती का अर्क (५०%)	धतूरे की पत्ती का अर्क (१००%)	नियन्त्रण
एस्पर्जिलस नाइजर	18.3	23.61	19.6	26.27	15.75	15.57	14.75
ए. नोड्यूलेन्स	6.24	7.95	5.4	6.10	2.5	3	3.36
ए. फ्लेबस	7.2	8.9	6.3	7.8	7.2	8.2	4.3
कनिंघमेला	1.5	2.1	1.2	2.6	.86	1.2	2.7
फ्यूजेरियम जाति	1.02	—	0.7	—	1.3	.6	16.5
क्लेडोस्पोरियम हरबेरम	6.3	8.2	3.5	4.3	1.95	1.3	2.5
पेनिसीलियम सीटराइनम	4.6	5.6	3.9	4.2	2.1	3.2	1.5
पिथियम जाति	.18	.3	.9	—	1.2	.67	7.3
क्यूवेयूलेरिया कूनटा	—	—	—	—	1.2	.56	3.7
राइजोपस जाति	.63	—	.73	—	1.3	.78	4.8
म्यूकर जाति	.6	—	—	—	2.3	1.3	4.6
हेलमिन्थोस्पोरियम	—	—	—	—	.2	—	.72
ट्राइकोटसीलिंगनोरस	4.6	5.7	4.2	4.8	3.9	4.2	3.7
राइजोक्टोनियासोलेनी	—	—	—	—	—	—	—
कीटोनियमग्लोबोसम	.85	—	.59	—	1.63	1.3	2.6
योग	52.02	62.36	52.23	56.07	43.39	41.88	79.51

सारणी 2 (ख)

अर्क की विभिन्न सान्द्रताओं का चने के पादप परजीवी सूत्रकृमियों की संख्या (500 ग्राम मृदा के चारों ओर के मूल से) पर प्रभाव

सूत्र कृमियों के नाम	नीम की पत्ती का अर्क 50%)	नीम की पत्ती का अर्क (१००%)	गेंदे की पत्ती का अर्क (५०%)	गेंदे की पत्ती का अर्क (१००%)	धतूरा की पत्ती का अर्क (५०%)	धतूरा की पत्ती का अर्क (१००%)	नियन्त्रण
मेलाइडोगाइन तरुण	200	16	228	46	430	36.7	18450
होप्लोलाइमस	50	12	40	8	75	35	159
हेलीकोटाइलिन्कस	1.3	—	24	—	39	26	56
टाइलिन्कस	—	—	—	—	2	—	5
रोटाइलिन्कस	—	—	—	—	16	7	23
टाइलिन्कोरिन्कस	3	—	17	—	92	37	175
जीफिनिमा	5	—	12	—	25	13	75
लांगीडोरम	—	—	—	—	1.20	—	7.30
हेटरोडेरा	3	—	6	—	9	8	17
योग	274	28	327	54	689	493	18967.3

निर्देश

1. ग्रेको. एन : निमैटोड एण्ड दयर कन्ट्रोल इन चिक पी। इन : द चिक पी (सम्पादक सक्सेना एम. सी. एण्ड सिंह के. बी.) वार्लिग फोर्ड, आक्स ऑन यू. के. सी. ए. बी. इण्टर नेश्नल, 1987, पृष्ठ 271-281.

2. हमीद, एस. एफ. : इण्डियन जर्नल एग्री साइन्स, 1970, 40, 207-210.

3. जान्सन, एस. एफ., कर्ल, ई. ए., गोन्ड, जे. एच. तथा एरीबर्ग, एच. ए. : मेथड्स फार स्टटीइंग सॉयल माइक्रोफ्लोरा-पलान्ट रिलेशनशिप। बगीश पब्लीकेशन। 1959.

4. खालिस, एन. तथा मनोहरा, चेरी, सी. : इण्डियन फाइटोपैथो, 1985, 38, 462-466.

5. कालीराम तथा गुप्ता, डी. सी. : इण्डियन जर्नल आफ निमैटोलॉजी, 1982, 12, 221-225.

6. मिश्रा, एस. डी. तथा द्विवेदी, बी. के. : सिगनीफिकेन्स ऑफ बोटैनिकल्स इन द मैनेजमेन्ट ऑफ प्लान्ट पैरासिटिक निमैटोड—एग्रीकल्चर इन 21st सेन्चुरी : सम्पादक द्विवेदी एवम् अन्य, पृष्ठ संख्या 95-100, प्रकाशक बायोवेद शोध एवम् प्रसार केन्द्र इलाहाबाद 1998, पेज संख्या 1-185.

7. मजूमदार, वी. तथा मिश्रा, एस. डी. : करेन्ट निमैटोलॉजी, 1991, 2 (1), 27-32.

8. पाण्डेय, जी. : डी.फिल. थिसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1988.

9. पाण्डेय जी. तथा सिंह, के. पी. : न्यू एग्रीकल्चरिष्ट, 1990, 1 (1), 65-73.

10. पन्त, हेमलता तथा पाण्डेय, जी. : एनल्स ऑफ प्लान्ट प्रोटक्शन साइन्सेज, 2001, 9 (1), 159-167.

11. पन्त, हेमलता, पाण्डेय, जी. तथा द्विवेदी, बी. के. : न्यू एग्रील्चरिष्ट, 2000, 11 (1, 2), 59-63.

12. पाण्डेय जी, द्विवेदी, बी. के. तथा सिंह, आर. बी. : न्यू एग्रीकल्चरिष्ट, 1991, 2 (2), 203-206.

13. रेड्डी, जी. एस. तथा राव, ए. एस. : इण्डियन जर्नल माइक्रोबायो., 1966, 5, 53-58.

14. साउथी, जे. एफ. : लेबोरेटरी मेथड फार वर्क विद प्लन्ट एण्ड सॉयल निमैटोड, टेक्निकल बुलेटिन एच. एम. न. **2** एच. एम. एस. ओ. लन्दन, 1970.

15. सिद्दीकी, एम. ए. तथा आलम, एम. एम. : पाकिस्तान जर्नल ऑफ निमैटोलॉजी, 1988, 6, 55-63.

16. वही : इण्डियन जर्नल ऑफ निमैटोलॉजी, 1988, 18 (2) : 335-337.

17. शर्मा, एस. बी. तथा मैकडोनाल्ड, डी. : क्राप प्रोटेक्शन, 1990, 9, 453-458.

18. सिंह तथा सीतारमैया : प्लान्ट डिज़ीज रिपोर्टर, 1966, 50, 668-672.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 4, October 2002.

लीगेन्ड्र श्रेणी की एकसमान (N, p, q) संकलनीयता

श्याम लाल तथा वीरेन्द्र नाथ त्रिपाठी
गणित विभाग, हार्कोर्ट बटलर टेक्नालाजिकल इंस्टीट्यूट, नवाबगंज, कानपुर (उ. प्र.)

[प्राप्त — जुलाई 19, 2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लीगेन्ड्र श्रेणी की एक समान (N, p, q) संकलनीयता पर एक नवीन प्रमेय की स्थापना की गई है। यह प्रमेय कई ज्ञात परिणामों का सार्वीकरण करती है।

Abstract

On uniform (N, p, q) summability of Legendre series. *By* Shyam Lal and Virendra Nath Tripathi, Department of Mathematics, Harcourt Butler Technological Institute, Nawabganj, Kanpur (U.P.)

In this paper a new theorem on uniform (N, p, q) summability of Legendre series has been established. This theorm generalizes several known results.

1. प्रस्तावना

लीगेन्ड्र श्रेणी की (c, a) हार्मोनिक तथा (N, p_n) संकलनीयताओं की विवेचना कई शोधकर्ताओं ने की है[1, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 13]। द्विवेदी ने[16] पहली बार लीगेन्ड्र श्रेणी की नार्लुण्ड संकलनीयता पर कार्य किया किन्तु एकसमान (N, p, q) संकलनीयता विधि से लीगेन्ड्र श्रेणी पर कोई कार्य नहीं हुआ।

2. परिभाषाएं तथा संकेतन

$-1 \leq x \leq 1$ द्वारा परिभाषित अन्तराल में लेबेस्ग समाकलनीय फलन से सम्बद्ध लीगेन्ड्र श्रेणी है—

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P(x) \tag{1.1}$$

जहाँ
$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx$$

तथा nवाँ लेबेस्क बहुपद $P_n(x)$ को निम्नांकित व्यंजक द्वारा परिभाषित किया जाता है।

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n$$

माना कि p अनुक्रम $\{P_n\}$, $P_{-1} = 0$ को दर्शाता है। इसी तरह P के स्थान पर हम इसी तरह के संकेतनों का प्रयोग अक्षरों के रूप में करेंगे।

यदि p तथा q दो अनुक्रम हों तो संवलन $p*q$ को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है–

$$(p*q)_n = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, q_k\,.$$

यह परिचित है और आसीन से पुष्ट किया जा सकता है कि संकलन की संक्रिया संचयी तथा साहचर्य है तथा $(p*1)_n = \sum_{k=0}^{n} P_k$, जहाँ 1 द्वारा अनुक्रम $\{1\}$ का बोध होता है।

माना कि $u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots$

कोई अपरिमित श्रेणी है और परिभाषित करती है

$$S_n(x) = \sum_{\upsilon=0}^{n} u_\upsilon(x)$$

माना कि $\{p_n\}$ तथा $\{q_n\}$ वास्तविक या संमिश्र अचरों के दो अनुक्रम हैं और हम लिखेंगे

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}\, q_k = (p*q)_n$$

यदि फलन $s = s(x)$ का अस्तित्व हो जिससे कि

$$\frac{1}{R_n} \sum_{\upsilon=0}^{n} P_\upsilon\, q_{n-\upsilon} \left(S_{n-\upsilon}(x) - s(x) \right) = 0\,(1) \text{ ज्योंज्यों } n \to \infty$$

समान रूप में सेट E में जिसमें $s = s(x)$ परिबद्ध हो तो श्रेणी $\sum_{\upsilon=0}^{n} u_{\upsilon}(x)$ योगफल $s(x)$ तक E में समान रूप से संकलनीय $N, p, q)$ है।

(N, p, q) माध्य की तीन महत्वपूर्ण विशिष्ट दशाएं इस प्रकार हैं—

(i) (N, p_n) माध्य जब $q_n = 1$ समस्त n के लिए

(ii) $(\overline{N}, q_n)$ माध्य जब $p_n = 1$ समस्त n के लिए

(iii) हर्मोनिक माध्य जब $p_n = \frac{1}{n+1}\ \forall n$ तथा $q_n = 1\ \forall n$

(N, p, q) विधि को नियमित होने के लिए आवश्यक पर्याप्त प्रतिबन्ध हैं—

$$\sum_{p_k=0}^{n} \left| p_{n-k}\, q_k \right| = o \left| (p * q)_n \right|$$

तथा $p_{n-k} = o \left| (p * q)_n \right|$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$ प्रत्येक स्थिर $k \geq 0$, के लिए जिसमें $q_k \neq 0$

इस प्रपत्र में हम $\{p_n\}$ तथा $\{q_n\}_n$ को वास्तविक, अनृण तथा समस्वनिक अवर्धमान अनुक्रम के रूप में मानते हैं जिससे कि $R_n = \sum_{k=0} p_k\, q_{n-k} \to \infty$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$.

हम निम्नांकित संकेतों का उपयोग करेंगे

$$\psi(t) = \psi(\theta, t) = f\{\cos(\theta - t) - f(\cos\theta)\}$$

$$\Psi(t) = \int_0^t |\psi(u)|\, du$$

$$N_n^{p,q}(t) = \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k\, q_{n-k} \frac{\sin(n-k+1)t}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

$R_t = R_{\left(\frac{1}{t}\right)}$ जहाँ t सूचित करता है $\frac{1}{t}$ के समाकल अंश को

3. ज्ञात प्रमेय

द्विवेदी ने लीगेन्ड्र श्रेणी की समान हार्मोनिक संकलनीयता पर निम्नांनिक प्रमेय की स्थापना की है

प्रमेय : यदि

$$\int_0^t |f(x \pm u) - f(x)|\, du = 0\left(\frac{t}{\log\frac{1}{t}}\right) \text{ ज्यों ज्यों } t \to +0$$

सेट E में समान रूप से अन्तराल (-1, 1) में परिभाषित है जिसमें $f(x)$ परिबद्ध हो तो श्रेणी (1.1) E से योगफल $f(x)$ में हार्मोनिक माध्यों से समान रूप से संकलनीय हो।

4. प्रमुख प्रमेय

इस प्रपत्र में उपर्युक्त प्रमेय एकसमान (N, p, q) संकलनीयता के लिए निम्नांकित रूप में सार्वीकृत की जा रही है—

प्रमेय : माना कि $\{p_n\}$ तथा $\{q_n\}$ दो वास्तविक अनृण तथा एकस्वरिक अवर्धमान अनुक्रम है ऐसे अचरों का जिससे कि

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} p_k\, q_{n-k} \to \infty \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty$$

यदि

$$\int_0^t |f(x \pm u) - f(x)|\, du = o\left|\frac{\lambda(1/t)\, t}{\log(1/t)}\right| \text{ ज्यों ज्यों } t \to +0$$

समान रूप से एक सेट E में हो जो अन्तराल (-1,1) में परिभाषित हो जिसमें $f(x)$ परिबद्ध हो। तब लेगेन्ड्र श्रेणी (1.1) सेट E में योगफल $f(x)$ तक समान रूप में सार्वीकृत नार्लुण्ड माध्य (N, p, q) द्वारा संकलनीय है जहाँ $\lambda(t)$ t का एक धन अवर्धमान फलन है जिससे कि $\frac{\lambda(n)}{\log n} \to 0$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$

5. प्रमेयिकाएँ

हमारी प्रमेय की उपपत्ति के लिए निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता पड़ेगी।

प्रमेयिका (5.1)

$$\sum_{\nu=0}^{n} (2\nu + 1)\, P_\nu(x)\, P_\nu(y) = (n+1)\, Q_n(x, y)$$

जहाँ

$$Q_n(x, y) = \frac{P_{n+1}(y)\, P_n(x) - P_n(y)\, P_{n+1}(x)}{y - x}$$

यह तत्समक संकलन का क्रिस्टेफेल सूत्र कहलाता है।

प्रमेयिका (5.2) : $0 < \varepsilon \leq v \leq \pi - \varepsilon$ के लिए

$$P_n(\cos v) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi n \sin v}\right)}\left(\cos(n+1)v - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(n^{-3/2}\right)$$

प्रमेयिका (5.3) : हमारे प्रतिबन्ध के अन्तर्गत

$$\int_0^t |f\{\cos(\theta - v)\} - f(\cos\theta)|\, dv = o\left(\frac{\lambda(1/t)\, t}{\log(1/t)}\right)$$

जहाँ $x = \cos\theta$, $x + u = \cos\phi$ तथा $\theta - \phi = v$

इस प्रमेयिका की उपपत्ति फोआ के अनुसार[2] होगी

प्रमेयिका (5.4) : (खान, 1974) यदि $\{p_n\}$ तथा $\{q_n\}$ अनृण तथा अवर्धमान हों तो $o \leq a \leq b \leq \infty$, $0 \leq t \leq \pi$ तथा किसी n के लिए

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p_k q_{n-k}\, e^{i(n-k)t}\right| \leq R(1/t) \text{ किसी भी } a \text{ के लिए}$$

प्रमेयिका (5.5) : $o \leq t \leq 1/n$ के लिए

$$N_n^{p,q}(t) = O(n) \text{ ज्योंज्यों } n \to \infty$$

उपपत्ति :

$$\left|N_n^{p,q}(t)\right| = \frac{1}{R_n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} \frac{\sin(n-k+1)}{\sin(t/2)}$$

$$= \frac{1}{R_n}\left|\sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k}\right| \frac{(2n-2k+1)\,|\sin(t/2)|}{|\sin(t/2)|}$$

$$= O(n)\left(\frac{1}{R_n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k}\right) = O(n)$$

प्रमेयिका (5.6) : $0 < 1/n \le t \le \eta < \pi$ के लिए

$$N_n^{p,q}(t) = O\left(\frac{R_\tau}{t R_n}\right)$$

उपपत्ति : यह भलीभाँति ज्ञात है कि $0 < 1/n \le t \le \eta < \pi$, $\sin(t/2) < t$ के लिए

$$\left| k_n(t) \right| = \frac{1}{R_n} \left| \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{\sin(n-k+1)t}{\sin(t/2)} \right|$$

$$\le \frac{1}{R_n} \left| \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{(\text{Imaginary part of } e^{|(n-k+1)t|})}{\sin(t/2)} \right|$$

$$\le \frac{1}{R_n} \left| \text{Imaginary part of} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\, e^{i(n-k)t}\, e^{it} \right|$$

$$\le \frac{1}{t R_n} \left| \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\, e^{i(n-k)t} \right| \left| e^{it} \right|$$

$$= O\left(\frac{1}{t R_n}\right) \left| \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\, e^{i(n-k)t} \right| = O\left(\frac{1}{t R_n}\right) \qquad \text{प्रमेयिका (5.4) से}$$

6. प्रमुख प्रमेय की उपपत्ति

श्रेणी (1.1) का nवाँ आंशिक योगफल प्रमेयिका (5.1) से

$$s_n(x) = \sum_{v=0}^{n} a_v P_v(x) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(y)\, Q_n(x, y)\, dy$$

है, $f(y) = 1$ रखने पर यह देखा जा सकता है कि

$$1 = \frac{n+!}{2} \int_{-1}^{+1} Q_n(x, y) \cdot dy$$

अतः

$$s_n(x) - f(x) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{+1} [f(y) - f(x)]\, Q_n(x, y)\, dy$$

परिभाषा के अनुसार

$$N_n^{p,q}(s) - f(x) = \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \left[S_{n-k}(x) - f(x) \right]$$

$$= \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{n-k+1}{2} \int_{-1}^{+1} [f(y) - f(x)]\, Q_{n-k}(x, y)\, dy$$

$$= \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} \frac{n-k+1}{2} \int_{-1}^{+1} [f(y) - f(x)]\, Q_{n-k}(x, y)\, dy + o(1)$$

(नियमितता प्रतिबन्ध से)

अब हम 1 से छोटी धन संख्या s लेते हैं और इसे अन्य दो धन संख्याओं μ तथा δ के योगफल के बराबर मानते हैं। माना कि d कोई अन्य धन संख्या है जिससे कि $o < d < \mu$, तथा μx, $\mu x'$ x के दो सतत फलन हैं (-1,1) के भीतर जो $d \le \mu x \le \mu$, $d \le \mu x' \le \mu$ सीमाओं के भीतर स्थित हैं। अतः $-1 + s \le x \le 1 - s$ के लिए

$$N_n^{p,q}(s) - f(x) = \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} \frac{n-k+1}{2} \left(\int_{-1}^{x-\mu x} + \int_{x-\mu x}^{x-\mu x'} + \int_{x+\mu x'}^{+1} \right)$$

$$\times [f(y) - f(x)]\, Q_{n-k}^{(x,y)}\, dy + o(1)$$

$$= \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} \left[A_{n-k}(x) + B_{n-k}(x) + C_{n-k}(x) \right] + o(1), \quad \textbf{माना}$$

हाब्सन[5] ने दिखलाया है कि $-1 + s \le x \le 1 - s$ के लिए समान रूप से

(a) $\lim_{n \to \infty} A_{n-k}(x) = 0$ (b) $\lim_{n \to \infty} C_{n-k}(x) = 0$

अब हम कल्पना करते हैं कि $x = \cos\theta$, $y = \cos\phi$: $o < \theta < \pi$, $1 - \delta = \cos\rho$, $1 - (\mu + \delta) = 1 - s = \cos(\rho + \sigma)$, $\rho > 0$, $\sigma > 0$ तो हमें $o < \rho < \pi/2$ प्राप्त होता है। इस तरह यदि $\eta(-1, 1-\mu)$ में μ के लिए [arc cos u − arc cos $(u + \mu)$] के न्यूनतम को बतलाता है तो सैन्सोन[9] अनुमान करने पर

$$B_{n-k}(\cos\theta)$$

$$= \frac{n-k+1}{2} \int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} [f(\cos\phi) - f(\cos\theta)] \sin\phi\, Q_{n+k}(\cos\theta, \cos\phi)\, d\phi$$

जिसमें $\rho + \sigma \le \theta \le \pi - (\rho + \sigma)$; $o < \eta \le \sigma$

प्रमेयिका (5.2) का उपयोग करने तथा $\alpha = \beta = o$ के लिए जैगो[10] का अनुगम करने पर थोड़ा सा सरलीकरण के बाद हमें निम्नांकित प्राप्त होता है

$$B_{n-k}(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(\sin\theta)}} \int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} [f(\cos\phi) - f(\cos\theta)] \sin^{1/2}\phi$$

$$\times \left\{ \frac{\sin[(n-k+1)(\theta-\phi)]}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\phi)} + \frac{\sin[(n-k+1)(\theta-\phi) - \pi/2]}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)} \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{(n-k)^2}\right)\right\} d\phi$$

अतः

$$N_n^{p,q}(s) - f(x)$$

$$= \frac{1}{2\pi R_n\sqrt{(\sin\theta)}} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} \int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} [f(\cos\phi) - f(\cos\theta)] \sin^{1/2}\phi$$

$$\times \left\{ \frac{\sin[(n-k+1)(\theta-\phi)]}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\phi)} + \frac{\sin[(n-k+1)(\theta-\phi) - \pi/2]}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\phi)} \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{(n-k)^2}\right)\right\} d\phi + o(1)$$

$$= L_1 + L_2 + L_3 + o(1), \quad \text{माना}$$

$\theta - \phi = t$ रखने पर

$$L_1 = \frac{1}{\pi R_n \sqrt{(\sin\theta)}} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} \int_0^{\eta} [f\{\cos(\theta - t)\} - f(\cos\theta)] \sin^{1/2}(\theta - t)$$

$$\times \frac{\sin(n-k+1)t}{\sin\frac{1}{2}t} \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{(\sin\theta)}} \int_0^{\eta} [f\{\cos(\theta - t)\} - f(\cos\theta)] \sin^{1/2}(\theta - t) \cdot \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k}$$

$$\times \frac{\sin(n-k+1)t}{\sin\frac{1}{2}t} \, dt$$

$$= O\left(\int_0^{\eta} |\psi(t)| \left| N_n^{p,q}(t) \right| dt\right)$$

$$= O\left(\int_0^{1/n} |\psi(t)|, \left| N_n^{p,q}(t) \right| dt\right) + O\left(\int_{1/n}^{\eta} |\psi(t)| \left| N_n^{p,q}(t) \right| dt\right) = I + J \text{ माना}$$

सर्वप्रथम I पर विचार करेंगे

$$I = O\left(\int_0^{1/n} |\psi(t)| \left| N_n^{p,q}(t) \right| dt\right)$$

$$= O(n) \int_0^{1/n} |\psi(t)| \, dt \qquad \text{प्रमेयिका (5.5) द्वारा}$$

$$= O(n)\, o\left(\frac{\lambda(n)}{n \log n}\right) = o\left(\frac{\lambda(n)}{\log n}\right)$$

$= o(I)$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$ सेट E में समान रूप से

अन्त में हम J पर विचार करते हैं—

$$J = O\left(\int_{1/n}^{\eta} |\psi(t)| \left| N_n^{p,q}(t) \right| dt \right)$$

$$= O\left(\int_{1/n}^{\eta} |\psi(t)|\ O\left(\frac{R_\tau}{t R_n} \right) dt \right)$$

$$= O\left(\frac{1}{R_n} \int_{1/n}^{\eta} |\psi(t)|\ \frac{R_\tau}{t}\ dt \right)$$

खण्डश : समाकलन करने पर

$$J = O\left(\frac{1}{R_n} \left\{ \Psi(t)\ \frac{R_\tau}{t} \right\}_{1/n}^{\eta} \right) + O\left(\frac{1}{R_n} \int_{1/n}^{\eta} \Psi(t)\ \frac{R_t}{t^2}\ dt \right)$$

$$+ O\left(\frac{1}{R_n} \int_{1/n}^{\eta} \Psi(t)\ \frac{d R_\tau}{t} \right) = I_1 + I_2 + I_3, \qquad \textbf{माना}$$

सर्वप्रथम हम I_1 को लेते हैं

$$I_1 = O\left(\frac{1}{R_n} \left\{ \Psi(t)\ \frac{R_\tau}{t} \right\}_{1/n}^{\eta} \right)$$

$$= O\left(\frac{1}{R_n} \right) \left\{ o\left(\frac{\lambda(1/t)\, t}{\log(1/t)} \right) \frac{R_\tau}{t} \right\}_{1/n}^{\eta}$$

$$= o\left(\frac{1}{R_n}\frac{\lambda(1/n)\ R(1/n)}{\log(1/n)}\right) + o\left(\frac{1}{R_n}\frac{\lambda(n)\ R_n}{\log\ n}\right)$$

$$= o(1) + \left(\frac{\lambda(n)}{\log\ n}\right)$$

$$= o(1) + o(1) = o(1) \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty$$

अब I_2 पर विचार करते हैं—

$$I_2 = O\left(\frac{1}{R_n}\int_{1/n}^{\eta}\psi(t)\,\frac{R_\tau}{t^2}\,dt\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{R_n}\int_{1/n}^{\eta} o\left(\frac{\lambda(1/t)}{\log(1/t)}\right)\frac{R_\tau}{t^2}\,dt\right)$$

$$= o\left(\frac{1}{R_n}\int_{1/n}^{\eta}\frac{\lambda(1/t)\ R_\tau}{t\ \log(1/t)}\,dt\right)$$

$$= o\left(\frac{\lambda(n)\ R_n}{R_n\ \log n}\right)\int_{1/n}^{\eta}\frac{dt}{t} = o(\lambda(n)) = o(1) \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty$$

अन्त में I_3 को निम्नवत् परिभाषित किया जा सकता है—

$$I_3 = O\left(\frac{1}{R_n}\int_{1/n}^{\eta}\psi(t)\,\frac{d\,R_\tau}{t^2}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{R_n}\int_{1/n}^{\eta} o\left(\frac{\lambda(1/t)\,t}{\log(1/t)}\right)\frac{d\,R_\tau}{t}\right)$$

$$= o\left(\frac{1}{R_n} \int_{1/n}^{\eta} \frac{\lambda(1/t)\, t}{\log(1/t)}\, dR_\tau = o\left(\frac{1}{R_n}\right) \frac{\lambda\ (n)}{\log\ n} \int_{1/n}^{\eta} dR_\tau \right)$$

$$= o\left(\frac{\lambda\ (n)}{R_n\ \log n} \right) \int_{1/n}^{\eta} dR\ [u]$$

$$= o\left(\frac{\lambda\ (n)}{R_n\ \log n} \right) \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} = o\left(\frac{\lambda\ (n)}{R_n} \cdot \frac{R_n}{\log n} \right)$$

$$= o\left(\frac{\lambda\ (n)}{\log n} \right) = o(1) \text{ ज्योंज्यों } n \to \infty$$

7. **विशिष्ट दशाएं**

1. यदि

$$\lambda(t) = 1,\ p_n = \frac{1}{n+1},\ q_n = 1\ \forall n$$

तो द्विवेदी के दोनों प्रमेय हमारी प्रमेय की विशिष्ट दशा बन जाते हैं।

2. प्रसाद का परिणाम[17] हमारी प्रमेय की विशिष्ट दशा बन जाता है यदि

$$\lambda(t) = \frac{\log\ t}{\alpha(p(t))},\ q_n = 1\ \forall n$$

3. यदि

$$\lambda(t) = \frac{t\,p(t)\log\ (t)}{p(t)},\ q_n = 1\ \forall n$$

तो त्रिपाठी का परिणाम[12] हमारी प्रमेय कि विशिष्ट दशा बन जाता है।

4. लाल तथा वर्मा का परिणाम[13] हमारी प्रमेय की विशिष्ट दशा बन जाता है यदि

$$\lambda(t) = \frac{\xi(t)\log\ t}{p(t)},\ q_n = 1\ \forall n$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक गण प्रो. ए. पी. द्विवेदी, अध्यक्ष गणित विभाग तथा प्रो. वी. के जैन, निदेशक एच. बी. टी. आई कानपुर के प्रति उनके द्वारा प्रदत्त प्रोत्साहन के लिए कृतज्ञता प्रकट करते हैं। एक लेखक श्याम लाल यू. जी. सी. जी. टी. रोड गाजियाबाद (उ. प्र.) के प्रति आर्थिक सहायता प्रदान करने के लिए आभार प्रदर्शित करता है।

निर्देश

1. चैपमैन, एस. : Mathematische Annalen, 1912, 72, 211-227.

2. फोआ, ए. : Boll, Un, Mat, Ital, 1943, (2), 5, 18-27.

3. हार, ए. : Mathematico di Palermo, 1911, 132-142.

4. वही : Mathematische Annalen, 1918, 78, 121-136.

5. हाब्सन, ई. डब्लू. : The theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonies, Cambridge, 1931.

6. कागबेत्लियांट्ज, ई. : Mathematische Zeitschrift 1922, 14, 99-109.

7. मकफाडेन, एल. : Duck Math, J., 1942, 9, 167-207.

8. प्लांचेरेल, एम. : Annales de 1' Ecole Normal Superieure, 1914, 31, 223-262.

9. सैंसोन जी. : Orthogonal Functions, English Edition, 1959.

10. जेगो, जी. : Orthogonal Polynomials, Amer, Math. Soc. Colloquium Publications. 1939.

11. त्रिपाठी, एल. एम. : Nat. Inst. Sci India, 1965, 30, 548-555.

12. वही : **Progress of Mathematics, 1977, Vol. 11, No. 1&2, 85-91å**

13. श्याम लाल तथा सुनीता वर्मा : Acta Ciencia Indica, 1988, XXIV, M, No. 4, 343-348.

14. खान, हजूर एच. : Indian Journal of Pure & Applied Math, 1974, 5 (2), 132-136.

15. बोर्वीन, डी. : London Math. Soc. 1958, 33, 352-257.

6. द्विवेदी, जी. के. : पी. एचडी. थीसिस, बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, वाराणसी 1970.

17. राजेन्द्र प्रसाद : Indian J. Pure appl. Math 1979, 10 (10), 1303-1311.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 4, October 2002.

राइजोबियम प्रभेदों का साइसर एरीटिनम लिन (Cicer arietinum Linn.) में ग्रन्थिकरण, दाने की उपज तथा प्रोटीन उत्पाद पर प्रभाव

ईश्वर चन्द्र शुक्ल तथा विनीता शुक्ला
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त — जून 5, 2002]

सारांश

कैल्सियम युक्त क्षारीय मृदा में उगाई गई चिकपी की C235 जाति पर नौ प्रभेदों का ग्रन्थिकरण सामर्थ्य, लेगहीमोग्लोबिन निर्माण, दाने की उपज तथा अपरिष्कृत प्रोटीन उत्पादन पर अध्ययन किया गया। यह पाया गया कि दाने की उपज, ग्रन्थि संख्या या ग्रन्थियों के शुष्क भार में कोई महत्त्वपूर्ण सहसंबंध नहीं है लेकिन दानों के उत्पादन का ग्रंथियों के लेगहीमोग्लोबिन से महत्त्वपूर्ण सहसंबंध है। अन्य प्रभेदों की तुलना में प्रभेद केजी 38 का दानों के अधिक उत्पादन में महत्त्वपूर्ण प्रभाव देखा गया।

Abstract

Effect of Rhizobium strains on nodulation, grain yield and protein content of chick pea (cicer arietinum Linn.). *By* Ishwar Chandra Shukla and Vinita Shukla, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad (U.P.).

In the present paper, nine strains of rhizobium species were studied for their nodulation capacity, leghaemoglobin content, grain yield and crude protein in the chickpea variety C 325 grown on a calcareous saline alkali soil. It was found that there is no significant correlation between grain yield and number of nodules or dry weight of nodules, but grain yield was significantly correlated with leghaemeglobin content of nodules. Strain KG38 showed significantly higher grain yield than other strains.

नटमैन[1] ने दर्शाया कि ग्रन्थिकरण अभिलक्षण पोषी की आनुवंशिक संरचना द्वारा निर्धारित किये जा सकते हैं किन्तु इसके पश्चात् कटिंग तथा शलमैन[2] ने बताया कि ग्लाइसीन मैक्स एल. (Glycine Max L.) ग्रंथियों पर लेगहीमोग्लोबिन समान था, जबकि परीक्षणों में अनपेक्षित प्रभाव वाले राइजोबियम प्रभेदों का प्रयोग किया गया था। सिस्टिक तथा फेरिस[3] ने ग्लाइसीन वाइटाई (Glycine Wightii) में पाया कि प्रारम्भिक ग्रंथिकाल समान हैं, जबकि परीक्षणों में बिना अपेक्षा वाले विभिन्न राइजोबियम प्रभेदों का प्रयोग किया गया था। लोबिया की वृद्धि एवं बीज की उपज पर राइजोबियम के विभिन्न प्रभेदों के प्रभाव का अध्ययन नेवीस इत्यादि,[4] कोलीनो इत्यादि[5], मास्क तथा विल्सन[6] विडिकिन तथा केनेडी[7] ने किया किंतु चने में विशेष रूप से ग्रंथियों के लेगहीमोग्लोबिन पर राइजोबियम प्रभेदों के प्रभाव का विवरण प्राप्त नहीं है।

प्रस्तुत अध्ययन में ग्रंथिकरण, दाने की उपज, अपरिष्कृत प्रोटीन और लेगहीमोग्लोबिन का चने की जाति C235 पर चुने गये राइजोबियम प्रभेदों के मूल्यांकन एवं क्षमता को प्रदर्शित किया गया है। राइजोबियम के नौ प्रभेदों को प्रभेद एफ6, एफ7, एफ9, एच44, एच45, केजी20, केजी37, केजी38, केजी41 a विभिन्न स्रोतों से लेकर उनके प्रयोग वनस्पति विज्ञान विभाग के क्षेत्र में किये गये। उसमें यादृच्छिक ब्लॉक डिजाइन के साथ-साथ प्रत्येक उपचार की तीन-तीन पुनरावृत्तियाँ की गईं। मिट्टी के रासायनिक एवं जैविक गुण सारणी 1 में दर्शाये गये हैं। मिट्टी के नमूने का रासायनिक विश्लेषण जैकसन विधि[8] के अनुसार किया गया है। कुल जीवाणुओं की पूर्ण संख्या ''थोर्टन एगर'' के ऊपर मारटिनी का रोज बंगाल एगर और ऐक्टिनोमाइसिटीज के लिए जेन्सन माध्यम तथा एजोटोबैक्टर के लिये मैनिटॉल एगर माध्यम (नाइट्रोजन रहित) प्रयोग किया गया।

सतही जीवाणु हनन के उपरान्त 200 बीजों को टीकाकृत किया गया। साथ में राइजोबियम प्रभेद को अलग अलग तैयार 10 प्रतिशत शर्करा विलयन में उपचारित किया गया तथा बीज 30 × 90 सेमी. प्लॉट की दूरी पर बोए गये। सभी ज़ीवित राइजोबियम प्रभेदों का सभी स्थितियों में परीक्षण किया गया। उर्वरक का प्रयोग एकरूपता के आधार पर 30 किग्रा. नाइट्रोजन और 60 किग्रा. की दर से यूरिया और सिंगल सुपर फॉस्फेट के साथ किया गया। पचास दिनों बाद पौधे उखाड़ लिये गये तथा पाँच पौधों में से एक को उपचारित किया गया। जड़ की ग्रन्थियों को सावधानीपूर्वक पानी से साफ किया गया। पूर्ण विकास एवं स्वस्थ वृद्धि तथा गुलाबी रंग के आधार पर ग्रन्थियों का मूल्यांकन किया गया तथा अपरिष्कृत प्रोटीन की मात्रा को सूक्ष्म जेल्डॉल विधि द्वारा ज्ञात किया गया।

लेगहीमोग्लोबिन को शिफमैन तथा लोबल[9] की विधि से ज्ञात किया गया। परिपक्व अवस्था में फसल की कटाई की गई तथा दानों की उपज ज्ञात की गई।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 2 से यह प्रतीत होता है कि टीकाकृत प्रभेद केजी 38 सभी प्रभेदों से महत्वपूर्ण है यद्यपि सभी अन्य प्रभेदों में यथा एफ 6, एच 44, केजी 41 और केजी 37 में, नियन्त्रण की अपेक्षा अधिक दानों का उत्पादन प्राप्त हुआ।

सारणी 1

मिट्टी का रासायनिक एवं सूक्ष्मजैवीय विश्लेषण

रासायनिक विश्लेषण	सूक्ष्म जैवीय विश्लेषण
1. पी एच 8.9	
2. वैद्युत चालकता (mmhos/cm) % 26.5	कुल जीवाणु 10^4/ग्रा.) 26.8, ऐक्टिनोमाइसिटीज 10^4/ग्रा.) 28.8
3. धनायन विनिमय क्षमता (m-eq/100) 7.5	कवक (10^4/ग्रा. 18.78, ऐजोटोबैक्टर (10^2/ग्रा.) 20.95
4. संतृप्त सोडियम 35.8%	
5. कुल घुलनशील लवण 1.6%	नाइट्रोजन स्थिरीकरण की सामर्थ्य (mg/100g) 7.90
6. कार्बनिक कार्बन 0.48%	
7. उपलब्ध P_2O_5 (किग्रा./हे.) 45	
8. कुल नाइट्रोजन 0.051%	

सारणी 2

दानों की उपज, ग्रन्थियों की संख्या, शुष्क भार, लेगहीमोग्लोबिन और बीजों के अपरिष्कृत प्रोटीन पर राइजोबियम के प्रभेदों का प्रभाव

उपचार	प्रति पौधा ग्रंथियों की संख्या	प्रति पौधा शुष्क भार (मिग्रा)	नई ग्रंथियों में लेगहीमोग्लोबिन मात्रा (मिग्रा/ग्रा.)	बीजों में अपरिष्कृत प्रोटीन (प्रतिशत)	दाने की उपज (टन/हे.)
नियंत्रण	5.8	42.8	2.56	24.25	1.64
एप 6	5.0	57.3	3.48	25.35	2.08
एफ 7	9.0	58.3	3.52	24.25	2.14
एफ 9	8.7	61.3	2.33	24.59	1.76
एच 44	9.8	62.8	2.97	25.56	1.76
एच 45	8.7	66.8	3.55	25.01	2.17
केजी 41	3.5	61.3	2.97	24.85	1.76
केजी 20	10.0	56.2	2.24	23.98	1.93
केजी 37	7.7	57.8	2.42	23.75	1.53
केजी 38	8.8	57.7	3.98	24.35	2.38
SE	0.63	2.25	0.029	0.012	0.056

यद्यपि ग्रंथिकरण प्रकार तथा प्रभेदों के बीच अंतर है फिर भी परिणामों से यह ज्ञात होता है कि टीकाकृत बीजों में प्रति पौधा ग्रंथियों की संख्या ज्यादा है। यह ग्रंथिभार और लेगहीमोग्लोबिन मात्रा, ग्रंथियों की संख्या तथा प्रभेद क्षमता के लिये संतोषजनक है (राय, सिंह तथा मुर्तजा)[10]। सारणी 3 से यह सूचित होता है कि दाने की उपज तथा ग्रंथियों की संख्या (r = 0.37) या ग्रंथि के शुष्क भार (r = 0.29) के बीच सहसम्बन्ध नहीं पाया जाता। लेकिन ग्रन्थि लेगहीमोग्लोबिन मात्रा (r=0.95) का दाने की उपज से पारस्परिक सम्बन्ध की महत्ता है। यह भी हो सकता है कि आनुवंशिक विविवधता और नाइट्रोजन स्थिरीकरण सामर्थ्य का प्रभेदों में अंतर हो।

किन्तु विचारणीय महत्त्वपूर्ण बिन्दु यह है कि नाइट्रोजन स्थिरीकरण की उपलब्धता और राइजोबियम के प्रभेदों का उपज पर प्रत्यक्ष रूप से पारस्परिक सम्बन्ध है। दाने की उपज के साथ लेगहीमोग्लोबिन की मात्रा का ग्रंथियों के साथ पारस्परिक सम्बन्ध आनुवंशिक नियंत्रण के कारण हो सकता है (विन्सेंट)।[11]

ग्रंथियों की क्रियाविधि के लिये पादप शरीर विज्ञान में सक्रिय लौह तत्त्व की मात्रा कुल ग्रंथन लौह सांद्रण से अधिक महत्त्वपूर्ण है (राय तथा प्रसाद)।[12]

सारणी 2 से स्पष्ट है कि प्रभेद केजी 38 में लेगहीमोग्लोबिन अन्य प्रभेदों की अपेक्षा अधिक है। कटिंग तथा शलमैन[2] ने स्पष्ट रूप से बताया कि लेगहीमोग्लोबिन संश्लेषण की क्रिया पादप आनुवंशिकी के नियंत्रण में होती है लेकिन प्रस्तुत परिणामों से यह लगता है कि चने के एक जीव प्रारूप के विभिन्न प्रकार के राइजोबियम प्रभेदों द्वारा लेगहीमोग्लोबिन की विभिन्न मात्रायें उत्पादित की गईं। अतः विभिन्न राइजोबियम, प्रभेदों और पोषी में, जो लेगहीमोग्लोबिन मात्रा को ग्रंथियों में अनुवांशिक संरचना द्वारा नियंत्रित करता है, विशेष पारस्परिक सम्बन्ध है।

सारणी 3

दाने की उपज एवं ग्रंथियों की संख्या, ग्रंथियों का शुष्कभार और ग्रंथियों की लेगहीमोग्लोबिन मात्रा के सहसम्बन्ध गुणांक

सहसम्बन्ध गुणांक का मान	ग्रंथियों की संख्या	ग्रंथियों का शुष्क भार	ग्रंथियों की लेगहीमोग्लोबिन मात्रा
(r)	0.37 NS	0.29 NS	0.95*

* P 0.01; NS., P 0.05

नटमैन[1] के अनुसार पोषी की आनुवंशिक संरचना द्वारा ग्रंथियों के लक्षणों को ज्ञात किया जा सकता है लेकिन प्रस्तुत अध्ययन से ज्ञात होता है इसमें प्रभेद एवं पोषी दोनों की ही भूमिका है क्योंकि विभिन्न प्रकार के प्रभेदों द्वारा विभिन्न संख्या तथा विभिन्न शुष्क भार वाली ग्रंथियाँ तथा दानों की उपज इस ओर स्पष्ट रूप से इंगित करते हैं। इस अध्ययन के परिणाम स्पष्ट रूप से विभिन्न राइजोबियम प्रभेदों पर चिक पी के जीन प्रारूप C 235 भी विभेदी अनुक्रिया को दर्शाते हैं।

निर्देश

1. नटमैन, पी. एस. : बायोलॉजिकल रिव्यू, 1956, 31, 109-151å

2. कटिंग, जे. ए. तथा शलमैन, एच. एम. : बायोकेमिका एट बायोफिजिका एक्टा, 1974, 229, 58.

3. सिस्टिक, ई. तथा फेरिस, आर. : क्यूबन जर्नल ऑफ एग्रीकल्चरल साइंस 1980, 14(3), 321-326.

4. नेविस, एम. सी. पी., समरफील्ड, आर. जे., मिनचिन, एफ. आर., हर्डले, बी. तथा रोबर्स, ई. एच. : Plant and Soil , 1982, 6 (12), 249-260.

5. कोलिनो, डी. जे., रक्को, आर. डब्ल्यू., एविला ए. डी. ई. लू. तथा भुट्टो, सी. सी. : फाइटॉन रिव्यू इन्ट. बॉटनी, 1985, 45 (1), 61-68.

6. मास्क, पी. एल. तथा विल्सन, डी. ओ. : साइंस प्लांट एना. 1978, 9 (8), 653-666.

7. विडकिन, के. डी. तथा कैनेडी, जी. डब्ल्यू. : फाइटोपैथोलॉजी, 1983, 73 (3), 429-434.

8. जैक्सन, एम. एल. : सॉयल केमिकल एनालिसिस, न्यूयॉर्क, पेन्टिसहॉल.

9. शिफमैन, जे. तथा लोबल, आर. : Plant and Soil, 1970, 33, 501-512.

10. राय, आर., सिंह, एस. एन. तथा मुर्तजा, एम. : करेंट साइंस, 1977, 46, 572-573.

11. विन्सेंट, जे. एम. (संपादक-ए. क्विसपल) 1974, पृष्ठ 265-341, एम्सटर्डम एवं ऑक्सफोर्ड, उत्तरी हॉलैण्ड.

12. राय, आर. तथा प्रसाद, वी. : जर्नल ऑफ एग्रीकल्चरल साइंस, 1982, 107 (1), 75-82.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 4, October 2002.

I-फलन तथा ऐपेल फल F_3 के गुणनफल का आंशिक समाकलन

आर. के. सक्सेना, जेता राम तथा श्रीमती ए. आर. चौहान
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जयनारायण व्यास यूनिवर्सिटी, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त — जून 22, 2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में एक एपेल फलन F_3, सक्सेना के I-फलन[27] तथा श्रीवास्तव एवं गर्ग[3] द्वारा परिभाषित बहुचरीय बहुपदों के सामान्य वर्ग के गुणनफलों के लिए दो आंशिक सूत्रों की विवेचना की गई है।

इन समाकलों को आंशिक समाकल के सैगो-मीडा आपरेटरों के रूप में भी व्यक्त किया गया है।

Abstract

Fractional integration of the product of I-function and Appell function F_3. *By* R. K. Saxena, Jeta Ram and (Ms) A. R. Chauhan, Department of Mathematics and Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur (Raj.).

This paper deals with the evaluation of two fractional integral formulas for the product of an Appell function F_3, the I-function due to Saxena[27] and a general class of multivariable polynomials defined by Srivastava and Garg[30]. These integrals are further expressed in terms of Saigo–Maeda operators[16] of fractional integration. The results obtained provide unification and extension of the recent work of Saigo and Raina[17], Kilbas and Saigo[7], Saigo and Kilbas[15] and Saxena and Saigo[24] etc. Finally we give the computable representation of the I-function.

1. प्रस्तावना

आंशिक कलन में समाकलों तथा गैर-पूर्णांक वर्गों के व्युत्पन्नों का अध्ययन किया जाता है। इस विषय को विगत 40 वर्षों में कई लेखकों ने[24, 34 31] H-फलन के लिए आंशिक समाकल सूत्र दिये हैं। इस प्रपत्र का उद्देश्य दो समाकल सूत्रों की स्थापना करना है जिनमें एपेल फलन F3 तथा I-फलन के गुणनफल निहित हैं। इन समाकलों को दो प्रमेयों के सिद्ध करने में व्यवहृत किया जावेगा जो आंशिक समाकलन के सैगो-मीडा आपरेटरों पर हैं। चूँकि प्राप्त परिणाम सामान्य प्रकार के हैं अतः इसके पूर्व दिये गये सार्वीकृत आंशिक समाकल सूत्र[7, 13, 14, 15, 17, 24] हमारे परिणामों की विशिष्ट दशाओं के रूप में होंगे।

सक्सेना द्वारा प्रचारित[27] I-फलन को निम्नवत् परिभाषित किया जावेगा–

$$I(z) = I^{m,n}_{p,q,r}\left[Z \left| \begin{matrix} \left(a_j, A_j\right)_{1,n}, \left(a_{ji}, A_{ji}\right)_{n+1,p_i} \\ \left(b_j, B_j\right)_{1,m}, \left(b_{ji}, B_{ji}\right)_{m+1,q_i} \end{matrix} \right. \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\omega} \int_{\mathcal{L}} \Theta\ (\xi)\, z^{\xi}\, d\xi \tag{1.1}$$

जहाँ $\omega = (-1)^{1\ 2}$ तथा

$$\Theta\ (\xi) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma\left(b_j - B_j \xi\right) \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(1 - a_j + A_j \xi\right)}{\sum_{i=1}^{r} \left\{ \prod_{j=m+1}^{q_i} \Gamma\left(1 - b_{ji} - B_{ji} \xi\right) \prod_{j=n+1}^{p_i} \Gamma\left(a_{ji} + A_{ji} \xi\right) \right\}} \tag{1.2}$$

p_i $(i = 1, ..., r)$, q_i $(i = 1, ..., r)$; $m, n \in N_0$ एवं प्रतिबंधों $0 \le n \le p_i$; $1 \le m \le q_i\,(i = 1, \ldots, r)$, की संतुष्टि करते हैं, r निश्चित धन पूर्णांक है, A_j, B_j, A_{ji}, B_{ji} वास्तविक तथा धनात्मक हैं ; $a_j, b_j, a_{ji}, b_{ji} \in \mathbb{C}$ ऐसा है कि

$$a_j\left(b_h + v\right) \ne B_h\left(a_j - k - 1\right)(v,\ k = 0,\ 1, \ldots, h = 1, \ldots, m) \tag{1.3}$$

तथा $(j = 1, \ldots, n)$. $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\omega\tau\infty}$ एक कंटूर है जो $\tau - \omega\,.\,\infty$ से $\tau + \omega\,.\,\infty$ (τ वास्तविक है) जटिल ξ– तल पर विस्तीर्ण है जिसके कि बिन्दु

$$\xi = \frac{\left(a_j - 1 - k\right)}{A_j}; \; j = 1, \ldots, n; \; k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

$\mathcal{L}$ के बाई ओर पड़ते हैं और इन बिन्दुओं को

$$\xi = \frac{\left(b_j + v\right)}{B_j}; \; j = 1, \ldots, m; \; v = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

इसके बाई ओर दिया जाता है।

गामा फलन[2, p 47] के उपगामी प्रसार से अर्थात्

$$\lim_{|y| \to \infty} |\Gamma(x + iy)| \, e^{x + \frac{1}{2}\pi |y|} \, |y|^{\frac{1}{2} - x} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \; (x, y \text{ real}) \tag{1.6}$$

यह देखा जा सकता है कि समाकल (1.1) अभिसारी होता है यदि

$$\text{(i)} \qquad |\arg z| < \frac{1}{2}\pi\Omega, \; \Omega > 0 \tag{1.7}$$

$$\text{(ii)} \qquad |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi\Omega, \; \Omega \ge 0, \; \text{Re}(\mu) < -1 \tag{1.8}$$

जहाँ

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} A_j + \sum_{j=1}^{m} a_j - \min_{1 \le i \le r} \left[\sum_{j=n+1}^{p_i} a_{ji} - \sum_{j=m+1}^{q_i} b_{ji} + \frac{p_i}{2} - \frac{q_i}{2} \right] \tag{1.9}$$

यह ध्यान देना रोचक होगा कि $r = 1$ होने पर I-फलन फाक्स के परिचित H-फलन में समाहित हो जाता है। H-फलन के विषय में विस्तृत जानकारी मथाई तथा सक्सेना[8] ने दी है।

श्रीवास्तव तथा गर्ग[30, p. 686, eq. (1.4)] द्वारा बहुपदों के बहुचरीय सामान्य वर्ग की परिभाषा तथा अध्ययन निम्न रूप में किया गया है—

$$S_L^{h_1, \ldots, h_s}\left(x_1, \ldots, x_s\right) = \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s \le 1} (-L)_{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s}$$

$$\times A\left(L; k_1, \ldots, k_s\right) \frac{x_1^{k_1} \ldots x_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} \left(h_j \in N_0; j = 1, \ldots, s\right) \tag{1.10}$$

जहाँ $h_1, \ldots, h_s$ यादृच्छिक धन पूर्णांक है तथा गुणांक $A(L; k_1, \ldots k_s)$, $(L, k_j \in N_0, j = 1, \ldots, s)$ यादृच्छिक अचर हैं जो वास्तविक या संमिश्र हैं।

हमें निम्नांकित परिणामों की आवश्यकता होगी[11, p. 727, Equation (5.4, 51.27)

$$\int_0^x t^{\rho-1}(x-t)^{c-1} F_3\left(a, a', b, b'; c; 1-\frac{t}{x}, 1-\frac{x}{t}\right) dt$$

$$= \Gamma\left[\begin{matrix} c, \rho + a', \rho + b', \rho + c - a - b \\ \rho + a' + b', \rho + c - a, \rho + c - b \end{matrix}\right] x^{\rho+c-1} \tag{1.11}$$

जहाँ

$$\text{Re}(c) > 0, \ \text{Re}(\rho) > \max\left[\text{Re}(-a'), \text{Re}(-b'), \text{Re}(a+b-c)\right]$$

तथा

$$\int_x^\infty t^{\rho-1}(t-x)^{c-1} F_3\left(a, a', b, b'; c; 1-\frac{x}{t}, 1-\frac{t}{x}\right) dt$$

$$= x^{\rho+c-1} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1 + a', -c - \rho, 1 + b' - c - \rho, -1 - a - b - \rho \\ 1 + a' + b' - c - \rho, 1 - a - \rho, 1 - b - \rho \end{matrix}\right] \tag{1.12}$$

जहाँ

$$\text{Re}(c) > 0, \ \text{Re}(\rho) < 1 + \min\left[\text{Re}(a'-c), \text{Re}(b'-c), \text{Re}(-a-b)\right]$$

(1.12) में आया संकेत $\Gamma\left[\begin{matrix}\ldots \\ \ldots\end{matrix}\right]$ गामा फलनों के एक अंश को बताने वाला है। इसके आगे निम्नांकित संकेतनों का प्रयोग किया जावेगा—

$$\zeta^* = -\min_{1 \le j \le m}\left[\frac{\text{Re}(b_j)}{B_j}\right], \ \eta + \max_{1 \le j \le n}\left[\frac{1 - \text{Re}(a_j)}{A_j}\right] \tag{1.13}$$

अन्त में हम आंशिक समाकलन के निम्नांकित आपरेटरों का फिर से स्मरण करते हैं जिनकी परिभाषा तथा अध्ययन सैगो तथा मीडा[16] ने दी है। माना कि $a, a', b, b', c \in \mathbb{C}$ तथा $x > 0$, तो एपेल फलन F_3 से सम्बद्ध सार्वीकृत आंशिक चलन कलन आपरेटरों को निम्नांकित समीकरणों द्वारा परिभाषित किया जाता है—

$$\left(I_{0+}^{a, a', b, b', c} f\right)(x) = \frac{x^{-a}}{\Gamma(c)} \int_0^x (x-t)^{e-1} t^{-a'}$$

$$\times F_3\left(a, a', b, b'; c; 1 - \frac{t}{x}, 1 - \frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \; (\mathrm{Re}(c) > 0) \tag{1.14}$$

$$\left(I_{0+}^{a, a', b, b', c} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^k \left(I_{0+}^{a, a', b+k, b', c+k} f\right)(x),$$

$$(\mathrm{Re}(c) \leq 0);\; k = [-\mathrm{Re}(c)] + 1]) \tag{1.15}$$

$$\left(I_{-}^{a, a', b, b', c} f\right)(x) = \frac{x^{-a'}}{\Gamma(c)} \int_x^\infty (t-x)^{c-1} t^{-a}$$

$$\times F_3\left(a, a', b, b'; c; 1 - \frac{x}{t}, 1 - \frac{t}{x}\right) f(t)\, dt \;,\; \mathrm{Re}(c) > 0 \tag{1.16}$$

$$\left(I_{-}^{a, a', b, b', c} f\right)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^k \left(I_{-}^{a, a', b, b'+k, c+k} f\right)(x),$$

$$(\mathrm{Re}(c) \leq 0);\; k = [-\mathrm{Re}(c)] + 1]) \tag{1.17}$$

2. समाकल

सबसे पहले जिस समाकल का मान ज्ञात करना है वह है—

$$\int_0^x t^{\rho-1}(x-t)^{c-1} F_3\left(a, a', b, b'; c; 1-\frac{t}{x}, 1-\frac{x}{t}\right)$$

$$\times S_L^{h_1, \ldots, h_s}\left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s}\right) I_{p,q,r}^{m,n}\left[\lambda t^{\sigma}\right] dt$$

$$= x^{\rho+c-1} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s \leq 1} (-L)_{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s} A\left(L; k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots x_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} x^{k_1 \lambda_1 + \ldots + k_s \lambda_s} \Gamma(c)$$

$$\times I_{p+3, q+3, r}^{m, n+3}\left[\lambda x^{\sigma} \middle| \begin{matrix} \left(a_j, A_j\right)_{1,n}, (\theta - a', \sigma), (\theta - b', \sigma), \\ \left(b_j, B_j\right)_{1,m}, \left(b_{ji}, B_{ji}\right)_{m+1, q_i}, (\theta - a' - b', \sigma), \end{matrix}\right.$$

$$\left. \times \begin{matrix} (\theta + a + b - c, \sigma), \left(a_{ji}, A_{ji}\right)_{n+1, p_i} \\ (\theta + a - c, \sigma), (\theta + b - c, \sigma) \end{matrix} \right] \tag{2.1}$$

जहाँ

$$\mathrm{Re}(c) > 0, \; \theta = 1 - \rho - \sum_{j=1}^{s} \lambda_j k_j, \; \sigma > 0, \; \lambda_j > 0 \; (j = 1, \ldots, m)$$

तथा

$$\sigma \max\left[\tau, \zeta^*\right] < \mathrm{Re}(\rho) + \min\left[\mathrm{Re}(a'), \mathrm{Re}(b'), \mathrm{Re}(c - a - b)\right] \tag{2.2}$$

उपपत्ति : (2.1) को सिद्ध करने के लिए हम फलन $I_{p,q,r}^{m,n}(\,.\,)$ को इसके मेलिन-बार्नीज कन्टूर समाकल के पदों में, जो (1.1) में दिये जाते हैं, बहुचरीय बहुपदों के सामान्य वर्ग को (1.10) से श्रेणी के रूप में व्यक्त करते हैं तब t तथा ξ- समाकलों के संकलन तथा समाकलन के क्रम को परस्पर परिवर्तित करते हुए, जो (2.1) में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अनुमेय है, हम पाते हैं कि

समाकल (2.1) के मान Δ के बराबर है—

$$\Delta = \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s \leq 1} (-L)_{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s} A\left(L;\, k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots y_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} \frac{1}{2\pi\omega} \int_{\mathscr{L}} \chi(\xi)\, \lambda^{\xi} \int_0^x t^{\rho + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j k_j + \sigma\xi - 1} (x - t)^{c-1}$$

$$\times F_3\left(a, a', b, b';\, c;\, 1 - \frac{t}{x},\, 1 - \frac{x}{t}\right) dt\, d\xi$$

(1.11) की सहायता से t-समाकल का मान निकालने पर उपर्युक्त व्यंजक निम्नवत् बन जाता है—

$$\Delta = x^{\rho + c - 1} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s \leq 1} (-L)_{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s} A\left(L;\, k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots x_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} x^{k_1 \lambda_1 + \ldots + k_s \lambda_s}$$

$$\frac{1}{2\pi\omega} \int_{\mathscr{L}} \chi(\xi) \left(\lambda x^{\sigma}\right)^{\xi} \Gamma \left[\begin{matrix} c,\, \rho + a' + \sum_{j=1}^{s} \lambda_i k_i + \sigma\xi,\, \rho + b' \\ \rho + a' + b' + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j k_j + \sigma\xi,\, \rho \end{matrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j k_j - \sigma\xi,\, \rho + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j k_j + c - a - b + \sigma\xi \\ + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j k_j + \sigma\xi + c - a,\, \rho + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j k_j + \sigma\xi + c - b \end{matrix}\right]$$

(1.1 की सहायता से उपर्युक्त परिणाम की विवेचना करने पर वांछित परिणाम (2.1) निकलेगा।

अब हम द्वितीय समाकल को स्थापित करेंगे—

$$\int_x^\infty t^{\rho-1}(t-x)^{c-1} F_3\left(a, a', b, b'; c; 1-\frac{x}{t}, 1-\frac{t}{x}\right)$$

$$\times I^{m,n}_{p,q,r}\left[\lambda t^\sigma\right] S_L^{h_1,\ldots,h_s}\left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s}\right) dt$$

$$= \Gamma(c)\, x^{\rho+c-1} \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{h_1 k_1+\ldots+h_s k_s \le L} (-L)_{h_1 k_1+\ldots+h_s k_s} A\left(L; k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots x_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} x^{\lambda_1 k_1+\ldots+\lambda_s k_s}$$

$$\times I^{m+3,n}_{p+3,q+3}\left[\lambda x^\sigma \left| \begin{matrix} \left(a_j, A_j\right)_{1,n}, (\theta+a'+b'-c, \sigma), (\theta-a, \sigma), \\ \left(b_j, B_j\right)_{1,m}, \left(b_{ji}, B_{ji}\right)_{m+1,q_i}, (\theta+a'-c, \sigma), \end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix} (\theta-b, \sigma), \left(a_{ji}, A_{ji}\right)_{n+1,p_i} \\ (\theta+b'-c, \sigma), (\theta-a-b, \sigma) \end{matrix}\right] \tag{2.3}$$

जहाँ

$$\sigma > 0,\ \lambda_i > 0\ (i = 1, \ldots, s),\ \theta = 1 - \rho - \sum_{j=1}^{s} \lambda_j k_j,$$

$$\sigma \min\left[\tau, \eta\right] + 1 > \mathrm{Re}(\rho) + \max\left[\mathrm{Re}(c-a'), \mathrm{Re}(c-b'), \mathrm{Re}(a+b-a')\right] \tag{2.4}$$

परिणाम (2.3) को भी इसी प्रकार से स्थापित किया जा सकता है यदि हम (2.1) के बजाय (2.3) को व्यवहृत करें।

इसके आगे $1-\rho-\sum_{j=1}^{s}\lambda_j k_j$ से θ का बोध होगा।

3. सम्प्रयोग

पिछले अनुभाग से प्राप्त परिणामों को व्यवहृत करके हम दो प्रमेयों को स्थापित करेंगे।

प्रमेय 1 : यदि $a, a', b, b', c \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(c) > 0$, $\sigma > 0$. इसके बाद माना कि

$$m, n, p, q \in N_0, A_j, B_k \ (j = 1, \ldots, n; l\ 1, \ldots, m)$$

$$A_{ji}, B_{ki} \ (j = n+1, \ldots, p_i, k = m+1, \ldots, q_i) \in R_+,$$

$$a_j, b_k \ (j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, m)$$

$$a_{ji}, b_{ki} \ (j = n+1, \ldots, p_i, k = m+1, \ldots, q_i) \in R \text{ or } \mathbb{C}$$

$|arg\,\lambda| < \frac{1}{2}\pi\Omega$, $\Omega > 0$ अचरों से प्रतिबन्ध

$$\sigma \max\left[\tau, \zeta^* s\right] < \mathrm{Re}(\rho) + \min[0, \mathrm{Re}(b' - a'), \mathrm{Re}(c - a - b - a')] \tag{3.1}$$

की तुष्टि होती है तो I-फलन तथा बहुपद $S_L^{h_1, \ldots, h}(.)$ के बहुचरीय सामान्य वर्ग के गुणनफल का सार्वीकृत आंशिक समाकल $I_{0+}^{a, a', b, b'}$ विद्यमान होता है और सूत्र

$$\left(I_+^{a, a', b, b', c}\left[t^{\rho-1} I_{p,q,r}^{m,n}\left(\lambda t^{\sigma}\right) S_L^{h_1, \ldots, h_s}\left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s}\right)\right]\right)(x)$$

$$= x^{\rho+c-a-a'-1} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s \le L} (-L)_{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s} A\left(L; k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots y_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} x^{\lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_s k_s}$$

$$\times I^{m,n+3}_{p+3,q+3,r}\left[\lambda x^{\sigma}\left|\begin{matrix}\left(a_j, A_j\right)_{1,n},(\theta, \sigma), (\theta + a + a' + b' - c, \sigma), \\ \left(b_j, B_j\right)_{1,m}, (\theta + a + a' - c, \sigma), (\theta + a' + b - c, \sigma)\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}(\theta + a' - b', \sigma), \left(a_{ji}, A_{ji}\right)_{n+1,p_i} \\ (\theta - b', \sigma), \left(b_{ji}, B_{ji}\right)_{m+1,q_i}\end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

लागू होता है।

यह आसानी से देखा जा सकता है कि (2.1) तथा (1.4) से (3.2) की प्राप्ति होती है। $r = 1$ होने पर I-फलन H-फलन में समानीत हो जाता है फलस्वरूप हमें उपप्रमेय 1.1 प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 1.1 माना कि $a, a', b, b', c \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(c) > 0$, $\sigma > 0$. आगे भी माना कि

$$m, n, p, q \in N_0, A_j, B_k \in R; a_j, b_k \in R$$

या $\mathbb{C} \;\; (j = 1, \ldots, p : k = 1, \ldots, q)$

$|\arg \lambda| < \frac{1}{2}\pi\Omega,\ \Omega > 0\ \ \sigma > 0$ अचरों से प्रतिबन्ध

$$\sigma \max\left[\tau, \zeta^{*}\right] < \mathrm{Re}(\rho) + \min\left[0, \mathrm{Re}(b' - a'), \mathrm{Re}(c - a - b - a')\right] \tag{3.3}$$

की तुष्टि होती है तो H-फलन तथा बहुपद $S_{L}^{h_1, \ldots, h_s}(.)$ के बहुचरीय सामान्य वर्ग के गुणनफल का सार्वीकृत आंशिक समाकल $I_{0+}^{a,a',b,b',c}$ विद्यमान रहता है और निम्नांकित परिणाम लागू होता है–

$$\left(I_{+}^{a,a',b,b',c}\left[t^{\rho-1} H_{p,q}^{m,n}\left(\lambda t^{\sigma}\right) S_{L}^{h_1,\ldots,h_s}\left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s}\right)\right]\right)(x)$$

$$= x^{\rho+c-a-a'-1} \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{h_1k_1+\ldots+h_sk_s \le L} (-L)_{h_1k_1+\ldots+h_sk_s}\, A\left(L; k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots x_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} x^{\lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_s k_s}$$

$$\times H^{m,n+3}_{p+3,q+3,}\left[dx^{\sigma} \left| \begin{matrix} (a_j, A_j)_{1,n}, (\theta, \sigma), (\theta + a + a' + b - c, \sigma), \\ (b_j, B_j)_{1,q}, (\theta + a + a' - c, \sigma), (\theta + a' + b - c, \sigma) \end{matrix} \right. \right.$$

$$\left. \times \begin{matrix} (\theta + a - b', \sigma), (a_{ji}, A_{ji})_{n+1,p} \\ (\theta - b', \sigma) \end{matrix} \right] \tag{3.4}$$

यदि हम $m = q = 1$, $n = p = 0$, $\sigma = 1$ लें तथा तत्समक

$$H^{1,0}_{0,1}\left(x \mid (0, 1) \right) = e^{-x} \tag{3.5}$$

को व्यवहृत करें तो निम्नांकित रोचक परिणाम प्राप्त होता है—

माना कि $a, a', b, b', c, \rho \in C$, $\text{Re}(c) > 0$। यदि $\text{Re}(\lambda) > 0$, $\text{Re}(\rho) > \max[0, \text{Re}(a + a' + b - c), \text{Re}(a' - b')]$, तो Exponential फलन तथा बहुपद $S_L^{h_1, \ldots, h_s}(.)$ के बहुचरीय सामान्य वर्ग के गुणनफल का सार्वीकृत आंशिक समाकल $I_{0+}^{a,a',b,b'}$ विद्यमान होता है तथा सूत्र

$$\left(I_{+}^{a,a',b,b',c} \left[t^{\rho - 1} e^{-\lambda t} S_L^{h_1, \ldots, h_s}\left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s} \right) \right] \right)(x)$$

$$= x^{\rho + c - a - a' - 1} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s \le L} (-L)_{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s} A\left(L; k_1, \ldots, k_s \right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots x_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} x^{\sum_{i=1}^{s} k_i \lambda_i}$$

$$\Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \theta, 1 - \theta + c - a - a' - b, 1 - \theta + b' - a' \\ 1 - \theta + c - a - a', 1 - \theta + c - b - a', 1 - \theta + b' \end{matrix} \right]$$

$$\times\ {}_3F_3\left[\begin{matrix} 1-\theta,\ 1-\theta+c-a-b-a',\ 1-\theta+b'-a' \\ 1-\theta+c-a-a',\ 1-\theta+c-b-a',\ 1-\theta+b'; \end{matrix} ;-\lambda x\right] \tag{3.6}$$

लागू होता है जब ${}_3F_3$ (.) सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन[2] है।

यदि हम (3.2) में $a' = 0$ रखें तो तत्समक[24, p. 93, equation 2.19]

$$\left(I_{0+}^{\alpha,0,\beta,\beta',\gamma} f\right)(x) = \left(I_{0+}^{\gamma,\alpha-\gamma,-\beta} f\right)(x)\ \gamma \in \mathbb{C} \tag{3.7}$$

के बल पर हमें उपप्रमेय (1.2) प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 1.2 : माना कि $\alpha, \beta, \eta \in C$, $\text{Re}(\alpha) > 0$, $\sigma > 0$. इसके बाद माना कि

$$m, n, p, q \in N_0, A_j, B_k\ (j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$$

$$A_{ji}, B_{ki}\ (j = n+1, \ldots, p_i,\ k = m+1, \ldots, q_i);$$

$$a_j, b_k\ (j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$$

$$\times\ a_{ji}, b_{ki}\ (j = n+1, \ldots, p_i,\ k = m+1, \ldots, q_i)$$

$|\arg\lambda| < \frac{1}{2}\pi\Omega$, $\Omega > 0$ अचरों से निम्नांकित प्रतिबन्ध की पूर्ति होती है

$$\sigma \max\left[\tau, \zeta^*\right] < \text{Re}(\rho) + \min[0, \text{Re}(\beta, \eta)] \tag{3.8}$$

तो I-फलन बहुपद $S_L^{h_1,\ldots,h_s}$ (.) का बहुचरीय सामान्य वर्ग के गुणनफल का सार्वीकृत आंशिक समाकल $I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}$ विद्यमान रहता है और निम्नांकित परिणाम लागू होता है—

$$\left(I_{+}^{\alpha,\beta,\eta}\left[t^{\rho-1} I_{p,q,r}^{m,n}\left(\lambda t^{\sigma}\right) S_L^{h_1,\ldots,h_s}\left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s}\right)\right]\right)(x)$$

$$= x^{\rho-\beta-1} \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{h_1k_1+\ldots+h_sk_s \le L} (-L)_{h_1k_1+\ldots+h_sk_s} A\left(L; k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots x_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} x^{\lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_s k_s}$$

$$\times I^{m, n+2}_{p+2, q+2, r}\left[\lambda x^{\sigma} \left| \begin{matrix} \left(a_j, A_j\right)_{1, n}, (\theta, \sigma), (\theta + \alpha + \beta + \eta, \sigma), \\ \left(b_j, B_j\right)_{1, m}, (\theta + \beta, \sigma), (\theta + \eta, \sigma) \end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix} \left(a_{ji}, A_{ji}\right)_{n+1, p_i} \\ \left(b_{ji}, B_{ji}\right)_{m+1, q_i} \end{matrix}\right] \tag{3.9}$$

यदि हम $\sigma = r = 1$ रखें और तत्सक (3.5) का प्रयोग करें तो (3.9) निम्नांकित परिणाम में समानीत हो जाता है —

माना कि $\alpha, \beta, \eta, \rho \in C$, $\text{Re}(\alpha) > 0$.। पुनश्च, माना कि अचरों से प्रतिबन्ध $\text{Re}(\rho) > \max[0, \text{Re}(\beta - \eta)]$, की तुष्टि होती है तो गुणनफल $e^{-\lambda t} S_L^{h_1, \ldots, h_s}(.)$ का सैगो प्राचल $I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta}$ विद्यमान रहता है और निम्नांकित सूत्र लागू होता है–

$$\left(I_{+}^{\alpha, \beta, \eta}\left[t^{\rho - 1}\, e^{-\lambda t}\, S_L^{h_1, \ldots, h_s}\left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s}\right)\right]\right)(x)$$

$$= x^{\rho - \beta - 1} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s \le L} (-L)_{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s} A\left(L; k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots y_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} x^{k_1 \lambda_1 + \ldots + k_s \lambda_s}$$

$$\Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \theta, 1 - \theta + \eta - \beta \\ 1 - \theta - \beta, 1 - \theta + \alpha + \eta \end{matrix}\right]$$

$$\times\ {}_2F_2(1-\theta,\ 1-\theta+\eta-\beta\ ;\ 1-\theta-\beta\ ;\ 1-\theta+\alpha+\eta\ ;-\lambda x) \qquad (3.10)$$

यदि हम $h_{ij} = 0\ (j = 2, \ldots, s)$ तथा $L \to 0$, लें तो (3.10) में दिया गया परिणाम सैगो तथा रैना[17, lemma 4] के एक ज्ञात परिणाम में समानीत हो जाता है। किन्तु यदि हम (3.9) में $\beta = -\alpha$ लें तो हमें रीमान-लिओविले आपरेटर का रोचक परिणाम प्राप्त होता जिसे

$$\left(I_{+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \ (\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0) \qquad (3.11)$$

$$\left(I_{+}^{\alpha}\left[t^{\rho-1} I_{p,q,r}^{m,n}\left(\lambda t^{\sigma}\right) S_L^{h_1,\ldots,h_s}\left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s}\right)\right]\right)(x)$$

$$= x^{\rho+\alpha-1} \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{h_1k_1+\ldots+h_sk_s \le L} (-L)_{h_1k_1+\ldots+h_sk_s} A\left(L\,;\ k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots y_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!}\, x^{k_1\lambda_1+\ldots+k_s\lambda_s}$$

$$\times I_{p+1,q+1,r}^{m,n+1}\left[\lambda x^{\sigma} \left| \begin{matrix} \left(a_j, A_j\right)_{1,n}, (\theta, \sigma), \left(a_{ji}, A_{ji}\right)_{n+1,p_i} \\ \left(b_j, B_j\right)_{1,m}, (\theta-\alpha, \sigma), \left(b_{ji}, B_{ji}\right)_{m+1,q_i} \end{matrix} \right.\right] \qquad (3.12)$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है जो (3.9) में दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत $\beta = -\alpha$ सत्य उतरता है। $A\,(L\,;\ K_1, \ldots, k_s) = \phi$ रखने पर जहाँ

$$\phi = \frac{\prod_{j=1}^{E}\left(e_j\right)_{k_1\zeta_j^1+\ldots+k_s\zeta_j^{(s)}}}{\prod_{j=1}^{G}\left(g_j\right)_{k_1\tau_j^1+\ldots+k_s\tau_j^{(s)}}} \times \frac{\prod_{j=1}^{U^1}\left(u_j^1\right)_{k_1 w_j^1} \ldots \prod_{j=1}^{U^{(s)}}\left(u_j^{(s)}\right)_{k_s w_j^{(s)}}}{\prod_{j=1}^{V^1}\left(v_j^1\right)_{k_1\xi_j^1} \ldots \prod_{j=1}^{V^{(s)}}\left(v_j^{(s)}\right)_{k_s\xi_j^{(s)}}} \qquad (3.13)$$

$S_L^{m_1, \ldots, m_s}[y_1, \ldots, y_s]$ श्रीवास्तव तथा डाउस्ट[29, p. 454] के सार्वीकृत लारिसेला फलन को जन्म देता है—

$$S_L^{m_1, \ldots, m_s}\left[y_1, \ldots, y_s\right] = F_{G : V^1, \ldots, V^{(s)}}^{1+E : U^1, \ldots, U^{(s)}}$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \left[-L : m_1, \ldots, m_s\right]\left[e : \zeta^1, \ldots, \zeta^{(s)}\right] : \left[(u^1) : w^1\right]; \ldots; \\ \left[g : \tau^1, \ldots, \tau^{(s)}\right] : \left[v^1 : \xi^1\right]; \ldots; \end{array}\right.$$

$$\left.\times \begin{array}{l} \left[(u^{(s)}) : (w^{(s)})\right]; y_1, \ldots, y_s \\ \left[(v^{(s)}) : (\xi^{(s)})\right]; \end{array}\right] \tag{3.14}$$

फलतः हमें उपप्रमेय 1.3 प्राप्त होती है।

उपप्रमेय 1.3 : माना कि $a, a', b, b', c \in C$, $\mathrm{Re}(c) > 0$, $\sigma > 0$. पुनश्च माना कि

$m, n, p, q \in N_0$, A_j, B_k $(j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, m)$

A_{ji}, B_{ki} $(j = n+1, \ldots, p_i, k = m+1, \ldots, q_i) \in R_+$;

a_j, b_k $(j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, m)$ a_{ji},

b_{ki} $(j = n+1, \ldots, p_i, k = m+1, \ldots, q_i)$

$|\arg \lambda| < \frac{1}{2}\pi\Omega$, $\Omega > 0$ अचरों से प्रतिबन्ध

$$\sigma \max\left[\tau, \zeta^*\right] < \mathrm{Re}(\rho) + \min\left[0, \mathrm{Re}(b' - a'), \mathrm{Re}(c - a - b - a')\right] \tag{3.15}$$

की तुष्टि होती है। तब I-फलन तथा सार्वीकृत लारिसेला फलन $F_{G : V^1, \ldots, V^{(s)}}^{1+E : U^1, \ldots, U^{(s)}}[.]$ के गुणनफल का सार्वीकृत आंशिक समाकल $I_{0+}^{a, a', b, b', c}$ का अस्तित्व होता है और निम्नांकित सूत्र सत्य उतरता है—

$$\left(I_{+}^{a, a', b, b', c}\left[t^{\rho-1} I_{p,q,r}^{m,n}\left(\lambda t^{\sigma}\right)\right] F_{G:V^{1},\ldots,V^{(s)}}^{1+E:U^{1},\ldots,U^{(s)}}\right.$$

$$\times\left[\begin{array}{l}\left[-L: m_1, \ldots, m_s\right]\left[e: \zeta^1, \ldots, \zeta^{(s)}\right]:\left[(u^1): w^1\right];\ldots; \\ \qquad\qquad \left[g: \tau^1, \ldots, \tau^{(s)}\right]:\left[(v^1): \xi^1\right];\ldots;\end{array}\right.$$

$$\times\left.\begin{array}{l}\left[(u^{(s)}):(w^{(s)})\right]; y_1 t^{\lambda_s}, \ldots, y_s t^{\lambda_s} \\ \left[(v^{(s)}):(\xi^{(s)})\right];\end{array}\right]$$

$$= x^{\rho+c-a-a'-1} \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{h_1 k_1+\ldots+h_s k_s \leq L} (-L)_{h_1 k_1+\ldots+h_s k_s}$$

$$\times (\phi) \frac{y_1^{k_1} \ldots y_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} x^{k_1 \lambda_1+\ldots+k_s \lambda_s}$$

$$\times I_{p+3, q+3, r}^{m, n+3}\left[\lambda x^{\sigma} \left| \begin{array}{l}\left(a_j, A_j\right)_{1,n}, (\theta, \sigma), (\theta+a+a'+b'-c, \sigma), \\ \left(b_j, B_j\right)_{1,m}, (\theta+a+a'-c, \sigma), (\theta+a'+b-c, \sigma)\end{array}\right.\right.$$

$$\times \left.\begin{array}{l}(\theta+a'-b', \sigma), \left(a_{ji}, A_{ji}\right)_{n+1, p_i} \\ (\theta-b', \sigma), \left(b_{ji}, B_{ji}\right)_{m+1, q_i}\end{array}\right] \qquad (3.16)$$

प्रमेय 2 : माना $a, a', b, b', c \in C$, $\operatorname{Re}(c) > 0$, $\sigma > 0$.।

पुनश्च $m, n, p, q \in N_0$, A_j, B_k $(j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$

A_{ji}, B_{ki} $(j = n+1, \ldots, p_i, k = m+1, \ldots, q_i) \in R_+;$

a_j, b_k $(j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, m)$ a_{ji},

b_{ki} $(j = n+1, \ldots, p_i, k = m+1, \ldots, q_i)$

$|\arg \lambda| < \frac{1}{2}\pi\Omega,\ \Omega > 0$ अचरों से प्रतिबन्ध

$$\sigma \max\left[\tau, \eta\right] + 1 > \text{Re}(\rho) + \max\left[\text{Re}(c-a-a'), \text{Re}(c-a-b')\,\text{Re}(b)\right] \tag{3.17}$$

की तुष्टि होती है। तब $I^{m,n}_{p,q,r}$ तथा $S^{h_1, \ldots, h_s}_{L}(.)$ के गुणनफल के सार्वीकृत आंशिक समाकल $I_{-}^{a,a',b,b',c}$ का अस्तित्व होता है और निम्नांकित सम्बन्ध सत्य उतरता है–

$$\left(I_{-}^{a,a',b,b',c}\left[t^{\rho-1}\, I^{m,n}_{p,q,r}\left(\lambda t^{\sigma}\right) S_L^{h_1,\ldots,h_s}\left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s}\right)\right]\right)(x)$$

$$= x^{e+c-a-a'-1} \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{h_1k_1+\ldots+h_sk_s \le L} (-L)_{h_1k_1+\ldots+h_sk_s}\, A\left(L; k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots y_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!}\, x^{\lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_s k_s}$$

$$\times I^{m+3,n}_{p+3,q+3}\left[\lambda x^{\sigma} \left| \begin{matrix} \left(a_j, A_j\right)_{1,n}, \left(a_{ji}, A_{ji}\right)_{n+1,p_i}, (\theta, \sigma), \\ (a+a'+\theta-c, \sigma)\ (a+b'+\theta-c, \sigma), (\theta-b, \sigma) \end{matrix}\right.\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix} (a+a'+b'+\theta-c, \sigma), (\theta+a-b, \sigma) \\ \left(b_j, B_j\right)_{1,m}, \left(b_{ji}, B_{ji}\right)_{m+1,q_i} \end{matrix}\right] \tag{3.18}$$

(1.16) तथा (2.3) से (3.18) को प्राप्त किया जा सकता है।

जब $a_i = b_j / \forall_{i,j}$ तो हमें उपप्रमेय 2.1 प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 2.1 : माना कि $a, a', b, b', c \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(c) > 0, \sigma > 0$.

पुनश्च $m, n, p, q \in N_0 ; A_j, B_k \in R_+^- \; (i = 1, \ldots, p ; j = 1, \ldots, q)$;

$\times \; a_i, b_j \in R$ या $\mathbb{C} \; (i = 1, \ldots, p ; j = 1, \ldots, q)$

$|\arg \lambda| < \frac{1}{2} \pi \Omega, \; \Omega > 0$ अचरों से प्रतिबन्ध

$$\sigma \max \left[\frac{\text{Re}(1 - a_j)}{A_j} \right] + 1 < \text{Re}(\rho) + \max [\text{Re}(c - a - a'),$$

$$\text{Re}(c - a - b'), \; \text{Re}(b)] \tag{3.19}$$

की तुष्टि होती है। तब H-फलन $S_L^{h_1, \ldots, h_s}(.)$ को गुणनफल के सार्वीकृत आंशिक समाकल $I_-^{a, a', b, b', c}$ का अस्तित्व होता है और निम्नांकित परिणाम निकलता है–

$$\left(I_-^{a, a', b, b', c} \left[t^{\rho - 1} H\left(\lambda t^\sigma \right) S_L^{h_1, \ldots, h_s} \left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s} \right) \right] \right)(x)$$

$$= x^{\rho + c - a - a' - 1} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s \leq L} (-L)_{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s} A\left(L ; k_1, \ldots, k_s \right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots y_s^{k_s}}{k_1 ! \ldots k_s !} x^{\lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_s k_s}$$

$$\times H_{p+3, q+3}^{m+3, 2} \left[\lambda x^\sigma \left| \begin{matrix} \left(a_j, A_j \right)_{1, p}, (\theta, \sigma), (a + a' + b' + \theta - c, \sigma), \\ (a + a' + \theta - c, \sigma), (a + b' + \theta - c, \sigma) \end{matrix} \right. \right]$$

$$\times \left.\begin{matrix} (\theta + a - b, \sigma) \\ (\theta - b, \sigma), \left(b_j, B_j\right)_{1,q} \end{matrix}\right] \tag{3.20}$$

सूत्र[24, p. 93, equation (2.16)]

$$\left(I_{-}^{a, 0, b, b', c} f\right)(x) = \left(I_{-}^{c, a-c, b} f\right)(x) \tag{3.21}$$

के बल पर जहाँ दक्षिण पक्ष का आपरेटर सैगो[13] का है, हमें उपप्रमेय 2.2 प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 2.2 : माना $a, a', b, b', c \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(c) > 0$. पुनश्च माना कि

$$m, n, p, q \in N_0 ; A_j, B_k \in R_+ \ (j = 1, \ldots, p ; k = 1, \ldots, q) ;$$

$$; a_j, b_k \in R \text{ या } C (j = 1, \ldots, p; k = 1, \ldots, q)$$

अचर तथा $|\arg \lambda| < \frac{1}{2}\pi\Omega, \ \Omega > 0$ के exponents से प्रतिबन्ध

$$\sigma \max_{1 \le j \le n} \left[\frac{\mathrm{Re}(1 - \alpha_j)}{A_j}\right] + 1 < \mathrm{Re}(\rho) + \max[\mathrm{Re}(-\beta), \mathrm{Re}(-\eta)] \tag{3.22}$$

की तुष्टि होती है। तब $I_{p,q,r}^{m,n}(.)$ तथा $S_L^{h_1, \ldots, h_s}(.)$ के गुणनफल का सार्वीकृत समाकल $I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}$ का अस्तित्व होता है और निम्नांकित सम्बन्ध पाया जाता है।

$$\left(I_{-}^{\alpha, \beta, \eta}\left[t^{\rho-1} I_{p,q,r}^{m,n}\left(\lambda t^{\sigma}\right) S_L^{h_1, \ldots, h_s}\left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s}\right)\right]\right)(x)$$

$$= x^{\rho-\beta-1} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s \le L} (-L)_{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s} A\left(L; k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots y_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} x^{\lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_s k_s}$$

$$\times I_{p+2, q+2, r}^{m+2, n}\left[\lambda x^{\sigma} \left| \begin{matrix} \left(a_j, A_j\right)_{1,n}, \left(a_{ji}, A_{ji}\right)_{n+1, p_i}, (\theta, \sigma), \\ (\theta + \beta, \sigma), (\theta + \eta, \sigma), \left(b_j, B_j\right)_{1,m}, \end{matrix}\right.\right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} (\theta + \alpha + \beta + \eta, \sigma) \\ \left(b_{ji}, B_{ji}\right)_{m+1, q} \end{matrix} \right] \tag{3.23}$$

यदि हम तत्समक (3.5) को व्यवहृत करें तथा $\sigma = r = 1$ लें तो हमें निम्नांकित रोचक परिणाम मिलता है

माना $\alpha, \beta, \eta, \rho \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > 0$। पुनश्च, यदि $\text{Re}(\lambda) > 0$, $x > 0$ लें तो

$$\left(I_{-}^{\alpha, \beta, \eta}\left[t^{\rho-1} e^{-\lambda t} S_{L}^{h_1, \ldots, h_s}\left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s}\right)\right]\right)(x)$$

$$= x^{\rho-\beta-1} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s \le L} (-L)_{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s} A\left(L; k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots y_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} x^{\lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_s k_s}$$

$$G_{3\,4}^{4\,0}\left[\lambda x \,\middle|\, \begin{matrix} \theta, \theta + \alpha + \beta + \eta \\ 0, \theta + \beta, \theta + \eta \end{matrix}\right] \tag{3.24}$$

यदि इसके आगे भी $h_j = 0$ $(j = 2, \ldots, s)$ तथा $L \to 0$, रखें तो (3.24) सैगो तथा रैना[17] द्वारा दिये गये परिणाम में समानीत हो जाता है। दूसरी ओर, यदि हम (3.23) में $\beta = -\alpha$ रखें तो निम्नांकित परिणाम प्राप्त होता है–

$$\left(I_{-}^{\alpha}\left[t^{\rho-1} I_{p,q,r}^{m,n}\left(\lambda t^{\sigma}\right) S_{L}^{h_1, \ldots, h_s}\left(y_1 t^{\lambda_1}, \ldots, y_s t^{\lambda_s}\right)\right]\right)(x)$$

$$= x^{\rho+\alpha-1} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s \le L} (-L)_{h_1 k_1 + \ldots + h_s k_s} A\left(L; k_1, \ldots, k_s\right)$$

$$\times \frac{y_1^{k_1} \ldots y_s^{k_s}}{k_1! \ldots k_s!} x^{\lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_s k_s}$$

$$\times I^{m+n,1}_{n+1,p+1,r}\left[\lambda x^{\sigma}\left|\begin{matrix}\left(a_j, A_j\right)_{1,n}, \left(a_{ji}, A_{ji}\right)_{n+1,p_i}, (\theta, \sigma)\\ (\theta-\alpha, \sigma), \left(b_j, B_j\right)_{1,m}, \left(b_{ji}, B_{ji}\right)_{m+1,q_i}\end{matrix}\right.\right] \tag{3.25}$$

जो (3.22) में दिये हुए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत $\beta = -\alpha$ के लिए सत्य उतरता है जहाँ

$$\left(I_{-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt \;\; (\mathrm{Re}(\alpha) > 0) \tag{3.26}$$

तथा

$$\theta = 1 - \rho - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j k_j$$

यदि हम $A(L;\, k_1, \ldots, k_s) = \phi$ रखें जहाँ

$$\phi = \frac{\prod_{j=1}^{E}\left(e_j\right)_{k_1 \zeta_j^1 + \ldots + k_s \zeta_j^{(s)}}}{\prod_{j=1}^{G}\left(g_j\right)_{k_1 \tau_j^1 + \ldots + k_s \tau_j^{(s)}}} \times \frac{\prod_{j=1}^{U^1}\left(u_j^1\right)_{k_1 w_j^1} \cdots \prod_{j=1}^{U^{(s)}}\left(u_j^{(s)}\right)_{k_s w_j^{(s)}}}{\prod_{j=1}^{V^1}\left(v_j^1\right)_{k_1 \xi_j^1} \cdots \prod_{j=1}^{V^{(s)}}\left(v_j^{(s)}\right)_{k_s \xi_j^{(s)}}}$$

$S_{l}^{m_1, \ldots, m_s}[y_1, \ldots, y_s]$ श्रीवास्तव तथा डाउस्ट[29,p.454] के सार्वीकृत लारिसेला फलन में समानीत हो जाता है तथा हमें उपप्रमेय 2.3 प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 2.3 : माना $a, a', b, b', c \in C$, $\mathrm{Re}(c) > 0$, $\sigma > 0$.। पुनश्च माना कि

$m, n, p, q \in N_0, A_j, B_k \; (j = 1, \ldots, n;\, k = 1, \ldots, m)$;

$A_{ji}, B_{ki} \; (j = n+1, \ldots, p_i;\, k = m+1, \ldots, q_i) \in R_+$;

$a_j, b_k \; (j = 1, \ldots, n;\, k = 1, \ldots, m)\; a_{ji}$,

$b_{ki} \; (j = n+1, \ldots, p_i,\, k = m+1, \ldots, q_i)$;

$|\arg \lambda| < \frac{1}{2}\pi\Omega,\; \Omega > 0$ अचरों से प्रतिबन्ध

$$\sigma \min\left[\tau, \eta\right] + 1 > \mathrm{Re}(\rho) + \max\left[\mathrm{Re}(c-a-a'),\; \mathrm{Re}(c-a-b')\, \mathrm{Re}(b)\right] \tag{3.27}$$

की तुष्टि होती है। तब $I^{m,n}_{p,q,r}$ तथा सार्वीकृत लारिसेला फलन $F^{1+E:U^1;\ldots;U^{(s)}}_{G:V^1;\ldots;V^{(s)}}$ [.] के गुणनफल का सार्वीकृत आंशिक समाकल $I_-^{a,a',b,b',c}$ का अस्तित्व होता है और सूत्र

$$\left(I_-^{a,a',b,b',c}\left[t^{\rho-1}\, I^{m,n}_{p,q,r}\left(\lambda t^{\sigma}\right)\right](x)\; F^{1+E:U^1,\ldots,U^{(s)}}_{G:V^1,\ldots,V^{(s)}}\right.$$

$$\times\left[\begin{matrix}\left[-L:m_1,\ldots,m_s\right]\left[e:\zeta^1,\ldots,\zeta^{(s)}\right]:\left[(u^1):w^1\right];\ldots;\\ \left[g:\tau^1,\ldots,\tau^{(s)}\right]:\left[(v^1):\xi^1\right];\ldots;\end{matrix}\right.$$

$$\times\left.\begin{matrix}\left[(u^{(s)}):\xi^{(s)}\right];\, y_1 t^{\lambda_1},\ldots,y_s t^{\lambda_s}\\ \left[(v^{(s)}):\xi^{(s)}\right];\end{matrix}\right]$$

$$= x^{\rho+c-a-a'-1}\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{h_1k_1+\ldots+h_sk_s\le L}(-L)_{h_1k_1+\ldots+h_sk_s}\, A\left(L;\, k_1,\ldots,k_s\right)$$

$$\times\frac{y_1^{k_1}\ldots y_s^{k_s}}{k_1!\ldots k_s!}\, x^{k_1\lambda_1+\ldots+k_s\lambda_s}\,\phi$$

$$\times I^{m+3,n}_{p+3,q+3}\left[\lambda x^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}\left(a_j,A_j\right)_{1,n},\left(a_{ji},A_{ji}\right)_{n+1,p_i},(\theta,\sigma),\\ (a+a'+\theta-c,\sigma),(a+b'+\theta-c,\sigma)\end{matrix}\right.$$

$$\times\left.\begin{matrix}(\theta+a+a'+b'-c,\sigma),(\theta+a-b,\sigma)\\ (\theta-b,\sigma),\left(b_j,B_j\right)_{1,m},\left(b_{ji},B_{ji}\right)_{m+1,q_i}\end{matrix}\right] \qquad (3.28)$$

सत्य उतरता है।

4. *I*-फलन का अभिकलनीय निरूपण

इसके आगे जो कुछ आवेगा उसमें

$$\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{j=1}^{n} a_j - \min_{1 \le i \le r} \left[\sum_{j=n+1}^{p_i} a_{ji} - \sum_{j=m+1}^{q_i} b_{ji} + \frac{p_i}{2} - \frac{q_i}{2} \right] \tag{4.1}$$

तथा

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} A_j + \sum_{j=1}^{m} B_j - \max_{1 \le i \le r} \left[\sum_{j=n+1}^{p_i} A_{ji} + \sum_{j=m+1}^{q_i} B_{ji} \right] \tag{4.2}$$

(1.1) में $\Gamma(b_j - B_j s)$ के पोलों पर $j = 1, \ldots, m$ के लिए अवशिष्टों (residues) की गणना करने पर हमें I-फलन का निम्नांकित निरूपण प्राप्त होगा तो अभिकलनीय रूप में होगा—

प्रमेय 3 : सूत्र

$$* I(z) = I_{p,q,r}^{m,n} [z] = \sum_{h=1}^{m} \frac{(-1)^{\nu}\, \Theta\, (\xi)\, z^{\xi}}{\nu!\, B_h} \tag{4.3}$$

सत्य है जहाँ

$$\xi = \frac{b_h + \nu}{B_h}$$

यदि $0 < |z| < \infty$ तथा $\Omega < 0$ तो (4.3) का अस्तित्व होता है। $\Theta\ (.)$ (1.2) में परिभाषित है। यहाँ यह मान लिया गया है कि $\Gamma(b_j - B_j s)$ के पोल सरल हैं अर्थात्

$$B_h\left(b_j + \nu_1\right) \ne B_j\left(b_h + \nu_2\right)$$

क्योंकि $j \ne h;\ j, h = 1, \ldots, m,\ \nu_1, \nu_2 = 0, 1, 2, \cdots$

इसी तरह से हम प्रमेय 4 को स्थापित कर सकते हैं।

प्रमेय 4 : जब $\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + A_j s)$ के पोल सरल हों अर्थात् जब

$$A_h\left(1 - a_j + \nu_1\right) \ne A_j\left(1 - a_h + \nu_2\right)$$

$$j \ne h;\ j, h = 1, \ldots, n,\ \nu_1, \nu_2 = 0, 1, 2, \ldots$$

तो सूत्र

$$I(z) = I^{m,n}_{p,q,r}[z] = \sum_{h=1}^{n} \sum_{v=0}^{\infty} \Theta(\zeta) \frac{(-1)^v}{v!\, A_h} \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{(1-a_h+v)}{A_h}} \tag{4.4}$$

लागू होता है जहाँ

$$\xi = -\frac{(1 - a_h + v)}{A_h}$$

(4.4) समस्त $z \neq 0$ के लिए विद्यमान होता है यदि $\Omega > 0$; Ω की परिभाषा (4.2) में दी हुई है।

टिप्पणी 1 : (2.3) आर्गुमेंट के लघु मान के लिए (2.3) से I-फलन का उपगामी प्रसार प्राप्त होता है। इस तरह

$$I^{m,n}_{p,q,r}(z) \sim O\left(|z|^e\right) \text{ ज्यों ज्यों } z \to 0$$

जहाँ

$$e = \min_{1 \le j \le m} \left[\frac{\mathrm{Re}(b_j)}{B_j}\right] \tag{4.5}$$

टिप्पणी 2 : वृहद z के लिए (4.4) से I-फलन का उपगामी प्रसार प्राप्त होता है। इस तरह

$$I(z) = I^{m,n}_{p,q,r}(z) \sim O\left(|z|^e\right) \text{ ज्यों ज्यों } z \to 0$$

जहाँ

$$e = \max_{1 \le j \le m} \left[\frac{\mathrm{Re}(a_j)}{A_j}\right] \tag{4.6}$$

जब $r=1$, तो (4.3) तथा (4.4) क्रमशः H-फलन[8, अध्याय 4] के लिए निम्नांकित ज्ञात फलनों में समानीत हो जाता है।

उपप्रमेय 3.1 : जब $\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - B_j s)$ के पोल सरल हैं अर्थात्

$$B_h\left(b_j + v_1\right) \neq B_j\left(b_h + v_2\right)$$

क्योंकि $(j \neq h;\ j, h = 1, \ldots, n,\ v_1, v_2 = 0, 1, 2, \ldots)$ तो सूत्र[8]

$$H(z) = H_{p,q}^{m,n}[z] = \sum_{h=1}^{m} \frac{(-1)^{\nu}\,\Theta^{*}\ \ (\xi)\, z^{\xi}}{\nu!\ B_h} \tag{4.7}$$

लागू होता है जहाँ

$$\xi = \frac{(b_h + \nu)}{B_h}$$

(4.7) विद्यमान होता है यदि $0 < |z| < \infty$ तथा $\Omega^{*} > 0$. $\Theta^{*} = [\Theta\ ]_{atr=1}$ जहाँ

$$\Omega^{*} = \sum_{j=1}^{n} A_j - \sum_{j=n+1}^{p} A_j + \sum_{j=1}^{m} B_j - \sum_{j=m+1}^{q} B_j > 0$$

उपप्रमेय 4.1 : जब $\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + A_j s)$ के पोल सरल हों तो सूत्र [8]

$$H[z] = H_{p,q}^{m,n}[z] = \sum_{h=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Theta^{*}\ (\zeta)\ \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!\ A_h} \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{(1-a_h+\nu)}{\lambda_h}} \tag{4.8}$$

लागू होता है जहाँ

$$\xi = \frac{(1 - a_h + \nu)}{A_h}$$

यदि $\Omega^{*} > 0$ तो (4.8) विद्यमान होता है।

निर्देश

1. बेडिएन्ट, पी. ई. : Polynomials related to Appell functions of two variables, Michigan थीसिस, 1958.
2. एर्डेल्यी, एम. इत्यादि : Higher transcendental functions vol. 1, McGraw – Hill, New York, 1953.
3. सिस्टर सेलीन, एम. फासेनमायर : Bull. Amer. Math. Soc. 1947, 53, 806-812.
4. फाक्स, सी. : Trans. Amer. Math. Soc. 1961, 98, 395-429.
5. हिल्फर, आर. (सम्पादक) : Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific Publishing Co. Singapore, New Jersey, London and Hongkong, 2000.
6. जैन, डी. तथा जैन, आर. : Kyungpook Math. J. 1939, 36, 53-62.
7. किल्बास, ए. ए. तथा सैगो, एम. : Fukuoka Univ. Sci. Rep. 1998, 28, 41-51.

8. मथाई, ए. एम. तथा सक्सेना, आर. के. : The H-function with Applications in Statistics and other Disciplines, Halsted Press, Wiley Eastern Limited, New Delhi, Wiley, New York, 1878.

9. मिलर, के. एस. तथा रास, ए. : An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1953.

10. पाडलुब्नी, आई. : Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, Academic Press, New York, London, Tokyo and Toronto, 1991.

11. प्रुदनीकोव, ए. पी., ब्रिचकोव, यू. ए. तथा मैरिएव, ओ. आई. : Integrals and Series, vol. 3, More Special Functions, Gordon and Breach, New York et alibi, 1990.

12. राइस,एस. ओ. : Duke Math. J. 1940, 6, 108-109.

13. सैगो, एम. : Math. Rep. Kyushu Univ. 1978, 11, 135-143.

14. सैगो, एम. : Math. Japan, 1979, 24, 379-385.

15. सैगो, एम. तथा किल्बस, ए. ए. : Fukuoka Univ. Sci. Rep. 1999, 29, 31-45.

16. सैगो एम. तथा मीडा, एन. : Varna, Bulgaria, 1996, 386-400.

17. सैगो, एम. तथा रैना, आर. के. : Fukuoka Univ. Sci. Rep., 1, 1988, 18 (1), 15-22.

18. सैगो, एम. तथा सक्सेना, आर. के. : J. Fractional calculus 1998, 14, 53-63.

19. सैगो, एम., सक्सेना, आर. के. तथा राम, जे. : Ganita Sandesh 1992, 6, 36-47.

20. सैम्को, एस. जी. किल्बस, ए. ए. तथा मैरिचेव, ओ. आई. : Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon (Switzerland) et alibi, 1993.

21. सक्सेना,आर. के. तथा कुमार, आर. : Le Matematische, 1995, 50, 63-271.

22. सक्सेना, आर. के. तथा निशिमोटो, के. : J. Fractional Calculus 1994, 6, 65-75.

23. सक्सेना, आर. के. तथा राम, जे. : J. Indian Acad. Math. 1994, 16.

24. सक्सेना आर. के. तथा सैगो, एम. : J. Fractional Calculus 2001, 19, 89-104.

25. सक्सेना, आर. के. तथा सिंह, वाई. : Vijnana Parishad Anusandhan Patrika 1993, 34, 55-61.

26. वही. : Indian J. Math. 1993, 35, 177-188.

27. सक्सेना, वी. पी. : Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1982, Sect. A 52 (A), 366-375.

28. श्रीवास्तव, एच. एम. : Indian J. Math. 1972, 14, 1-6.

29. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा डाउस्ट, एम. सी. : Indiag. Math. 1969, 31, 449-457.

30. श्रीवास्तव एम. तथा गर्ग, एम. : Rev. Roumanine Phys. 1987, 32, 685-692.

31. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा हुसैन, एम. ए. : Computer Math. 1996, 30 (9), 73-85.

32. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा कैसिन, जी. डब्लू. : Multiple Gaussian Hypergeometric Series, Halsted Press, Ellis Harwood Limited, Chichester, Wiley, New York, 1985.

33. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा सक्सेना, आर. के. : Appl. Math. Comput 2001, 118, 1-52.

34. श्रीवास्तव, एच. एम., सक्सेना आर. के. तथा जेता राम : J. Math. Anal. Appl. 1995, 193, (2), 373-389.

35. वर्मा, आर. सी., जैन, आर. तथा वैश्य, जी. डी. : Proc. Nat. Acad. Sci., India, 1989, A 59, 329-337.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 4, October 2002.

क्षारीय धातुओं के एक-हैलोजनों के स्पेक्ट्रमी अभिलक्षण

के. एन. उत्तम, एस. कुमार तथा एम. एम. जोशी
साहा स्पेक्ट्रोस्कोपी प्रयोगशाला
भौतिकी विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद, उ. प्र.

[प्राप्त — जुलाई 22, 2002]

सारांश

इस आलेख में, क्षार धातुओं के एक-हैलोजनों के वर्णक्रम से प्राप्त सूचनाओं का पुनरावलोकन किया गया है। अब तक चिन्हित प्रजातियां एवं प्रेक्षित आणविक संक्रमणों को सूचीबद्ध किया गया है, ऊर्जा स्तर आरेख बनाये गये हैं तथा समसंयोजी अणुओं के महत्त्वपूर्ण गुणों की विवरण सहित विवेचना की गयी है। आद्य अवस्था कम्पन आवृत्ति (ω''_e) एवं इलेक्ट्रानों की संख्या (Ne) तथा ω''^{-2}_e एवं Ne के मध्य ग्राफ खींचे गये हैं। संक्रमणों से सम्बन्धित नीचे की अवस्था के लिए वियोजन ऊर्जा तथा बल स्थिरांक के मानों की गणना की गयी है। गणना एवं प्रेक्षणों से प्राप्त कम्पन आवृत्ति (ω''_e) की तुलना करने का प्रयास किया गया है।

Abstract

Spectroscopic characterization of alkali metals monohalides. *By* K. N. Uttam, S. Kumar and M. M. Joshi, Saha's Spectroscopy Laboratory, Physics Department, Allahabad University, Allahabad, U.P.

In this paper, the informations on the spectrum of alkali metals monohalides have been reviewed. The identified species and molecular transitions are listed. The energy level diagram has been constructed and various important properties of isovalent molecules have been discussed in detail. The graph between ground state vibrational frequency (ω''_e) and number of electron (Ne) and ω''^{-2}_e versus Ne have been drawn. The disssociation energy and the values of force

* विज्ञान व प्रौद्योगिकी तथा महानगर विकास, मंत्री, भारत सरकार

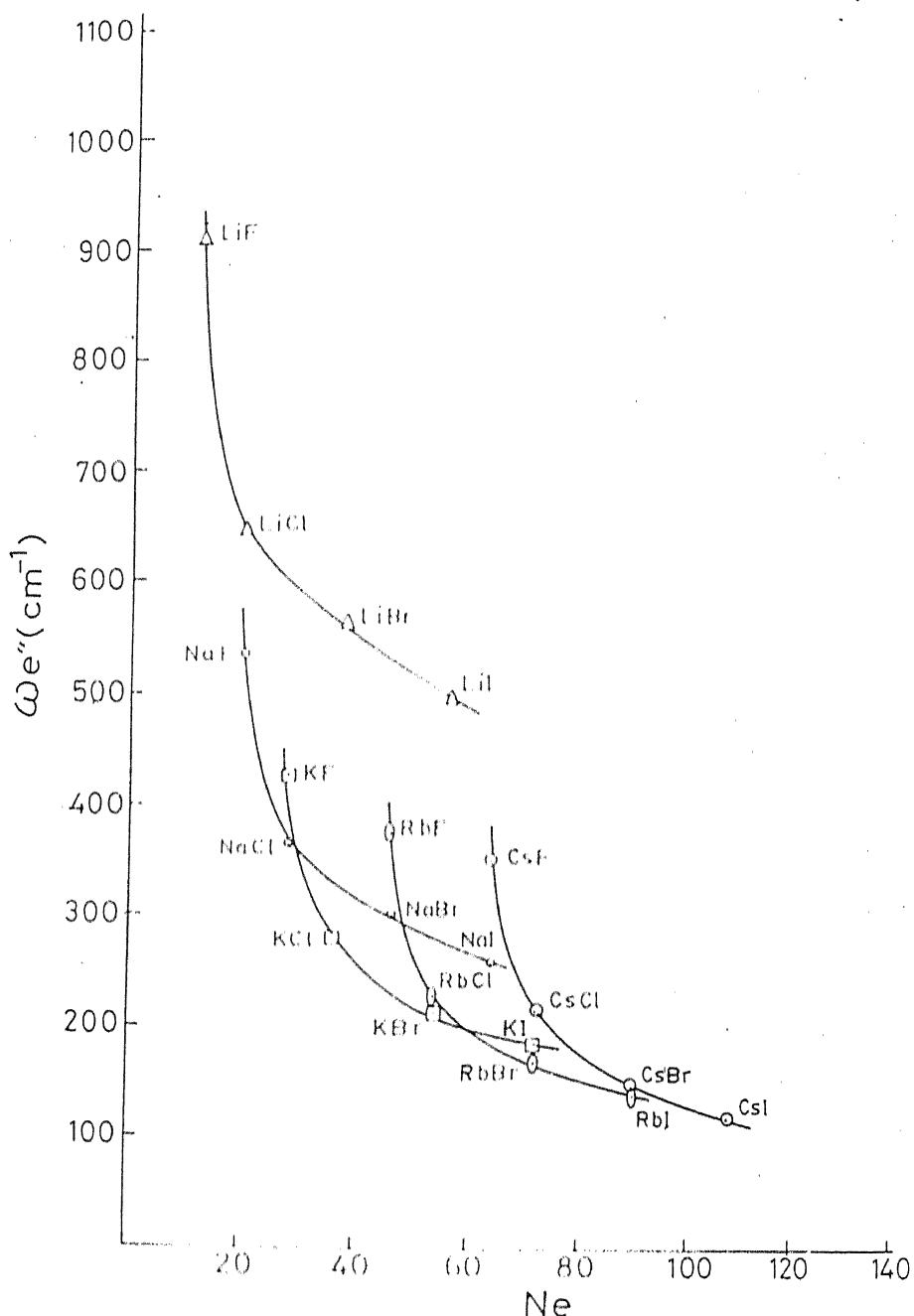
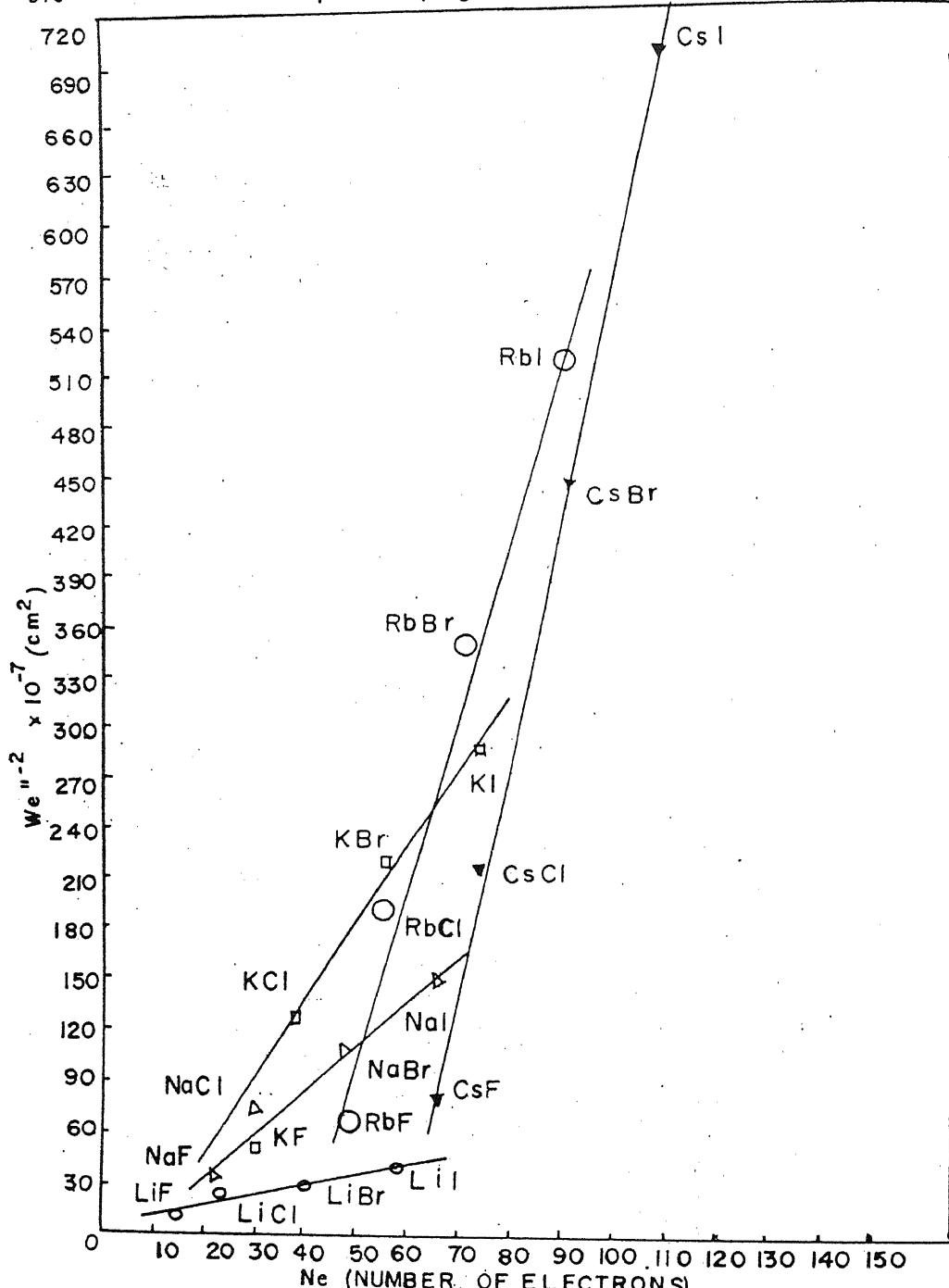
constant for the lower state have been calculated. Attempts have been alo made to compare (ω''_c) obtained from rotational constants and experimentally determined value.

द्विपरमाणविक अणुओं के क्षेत्र में हुए कार्यों की प्रगति की समीक्षा 1979 में ह्यूबर तथा हजबर्ग[1] द्वारा की गयी। जैसे-जैसे विषय बढ़ता गया, 'मालीक्यूल्स इन स्टार्स'[2], 'मालीकुलर स्पेक्ट्रा इन स्टार्स', 'मालीक्यूल्स इन एस्ट्रोनामी'[3] तथा 'स्टेलर स्फियर में छोटे अणुओं का अध्ययन[4] नामक समीक्षा आलेख प्रकाशित हुए।

ऐसे अनेकानेक अणु ज्ञात हैं जो तारकीय वातावरण के साथ-साथ पृथ्वी की सतह में भी पाये जाते हैं। इनके अन्वेषण से आशा बँधी है कि रसायनज्ञों एवं अंतरिक्षवैज्ञानिकों के लिए उनका अध्ययन महत्त्वपूर्ण होगा। ऐसे अणुओं के भौतिक तथा स्पेक्ट्रमी प्रकृति के अध्ययन मृदा रासायनिकी से सम्बन्धित समस्याओं को हल करने में भी अत्यधिक उपयोगी हैं क्योंकि क्षारीय मृदा यौगिक भिन्न-भिन्न तारकीय स्त्रोतों से उत्सर्जित विकिरणों में पाये जाते हैं। साथ ही, ये यौगिक सूक्ष्म मात्रा में पृथ्वी की सतह पर भिन्न-भिन्न स्थानों पर परिवर्तनशील मात्रा में भी पाये जाते हैं। इनकी आणविक संरचना, वियोजन की ऊष्मा, बल स्थिरांक तथा अन्य भौतिक राशियों पर अंर्तदृष्टि उनके निर्माण को गम्भीरता से समझने में ठोस आधार प्रदान करेगी। विषय के विस्तार को देखते हुए प्रस्तुत आलेख में विवेचना को केवल क्षारीय धातुओं के एक-हैलोजनों तक ही सीमित रखा गया है। हमारा उद्देश्य अणुओं की संरचना के बारे में विस्तृत सूचनाएं देना है जो भौतिकीविदों, अंतरिक्ष वैज्ञानिकों, कृषि प्रौद्योगिकीविदों तथा रासायनशास्त्रियों के लिए अत्यंत उपयोगी हैं।

क्षार धातुओं के एक-हैलोजन वर्णक्रम का अध्ययन अनेक शोधकर्ताओं के लिए रुचिकर रहा है[1-18]। आर्वत सारणी का IA उपसमूह (जिसे क्षार धातु समूह कहते हैं) छः तत्त्वों (Li, Na, K, Rb, Cs, तथा Fr) का समूह है। इन तत्वों में से प्रत्येक द्विपरमाणविक एक-हैलोजनों के वर्णक्रम का अध्ययन किया गया है। प्रत्येक अणु में अनेक संक्रमणों का अन्वेषण किया गया है। इन संक्रमणों को पूर्ण विकसित पट्टिकाओं (Bands) एवं रेखाओं (Lines) से परिभाषित किया गया है। इन अणुओं के प्रेक्षित संक्रमणों के गूढ़ रहस्य सजातीय अणुओं के सहसंयोजी वर्णक्रम का सुन्दर उदाहरण प्रस्तुत करते हैं। सारणी 1 में इन अणुओं के प्रत्येक परमाणु की सामान्य अवस्था का इलेक्ट्रान विन्यास, परमाणविक आद्य अवस्था[1] तथा प्रथम आयनीकरण विभव[19] दर्शाया गया है। जब एक क्षार धातु का परमाणु एक-हैलोजन परमाणु से मिलता है तो क्षारीय धातु एक-हैलोजन का निर्माण होता है। सारणी 2 में इन अणुओं की सभी सम्भव आणविक अवस्थायें, बहुकता तथा प्रेक्षित आद्य अवस्था संकलित की गयी हैं।

परिणाम एवं विवेचना

आद्य अवस्था कम्पन आवृत्ति का व्यवहार अत्यधिक संतोषजनक है तथा इलेक्ट्रानों की संख्या (Ne) एवं कम्पन आवृत्ति (ω''_e) का आलेख (चित्र 1) एक समतल वक्र (smooth curve) है। हावेल के अनुसार एक ही तरह के अणुओं में (ω'_e/ω''_e) के अनुपात की समरूपता यह इंगित

चित्र 1 : आद्य अवस्था कम्पन आवृत्ति (ω''_e) का इलेक्ट्रानों की संख्या (Ne) के साथ विचरण वक्र।

चित्र 2 : (ω''_e) का इलेक्ट्रानों की संख्या (Ne) के साथ विचरण वक्र

करती है कि उत्सर्जित अवस्था में अणुओं के बंधन में एक ही तरह की शिथिलता पायी जाती है। इसी से मिलती जुलती स्थिति क्षारीय धातुओं के एक– हैलोजनों में पायी जाती है जहाँ पर (ω'_e/ω''_e) का अनुपात लगभग स्थिर होता है। ω''^{-2}_e एवं Ne का आलेख एक सीधी रेखा है (चित्र 2) जो आँकड़ों की परिशुद्धता दर्शाता है।

सारणी 1

इलेक्ट्रान विन्यास, परमाणविक आद्य अवस्था तथा प्रथम आयनीकरण विभव

तत्व	प्रतीक	सामान्य अवस्था में इलेक्ट्रान विन्यास	LS युग्मन में आद्य अवस्था	प्रथम आयनीकरण विभव (eV)
लीथियम	$_3Li$	$K, 2S^1$	$^2S_{1/2}$	5.39
सोडियम	$_{11}Na$	$KL, 3s^1$	$^2S_{1/2}$	5.14
पोटैसियम	$_{19}K$	$KLM_{sp}, 4s^1$	$^2S_{1/2}$	4.34
रुबीडियम	$_{37}Rb$	$KLMN_{sp}$' $5s^1$	$^2S_{1/2}$	4.18
सीजियम	$_{55}Cs$	$KLMN_{spd}O_{sp}, 6s^1$	$^2S_{1/2}$	3.89
फ्लोरीन	$_9F$	$K, 2s^2 2p^5$	$^2P_{3/2}$	17.42
क्लोरीन	$_{17}Cl$	$KL, 3s^2 3p^5$	$^2P_{3/2}$	13.01
ब्रोमीन	$_{35}Br$	$KLM, 4S^2 4P^5$	$^2P_{3/2}$	11.41
आयोडीन	$_{53}I$	$KLMN_{spd}$' $5s^2 5p^2$	$^2P_{3/2}$	10.44

सारणी 2

क्षारीय धातुओं के एक-हेलोजनों की अणु इलेक्ट्रान अवस्थाएं

अणु	पृथक्कृत परमाणु	बहुकता	अनुमत अवस्थाएँ	प्रेक्षित आद्य अवस्था
LiX	$^2S_{1/2} + {}^2P_{3/2}$	1, 3	Π, Σ	$^1\Sigma^+$
NaX	$^2S_{1/2} + {}^2P_{3/2}$	1, 3	Π, Σ	$^1\Sigma^+$
KX	$^2S_{1/2} + {}^2P_{3/2}$	1, 3	Π, Σ	$^1\Sigma^+$
RbX	$^2S_{1/2} + {}^2P_{3/2}$	1, 3	Π, Σ	$^1\Sigma^+$
CsX	$^2S_{1/2} + {}^2P_{3/2}$	1, 3	Π, Σ	$^1\Sigma^+$

जहाँ X = F, Cl, Br, I

ऊर्जा स्तर आरेख

पट्टिका समूहों के संक्रमण को निरूपित करने हेतु ऊर्जा आरेख खींचे गये। ऊर्जा स्तर आरेख में सबसे नीचे वाली अवस्था को X से निरूपित किया गया है जबकि अन्य उत्सर्जित अवस्थाओं को ऊर्जा के बढ़ते हुए क्रम के अनुसार A, B, C ... से निरूपित किया गया है। इन ऊर्जा आरेखों

सारणी 3 *क्षारीय धातुओं के एक-हेलोजनों के स्पेक्ट्रमी स्थिरांक*

अणु	Ne	ω''_e	$\omega''^{-2}_e \times 10^{-7}$	$\omega''_e x''_e$	μ	D_o	$K \times 10^5$
LiF	12	910.3	12.07	7.93	5.12381	3.24	2.50007
LiCI	20	643.3	24.16	4.5	5.84357	2.85	1.42395
LiBr	38	563.1	31.54	3.5	6.44319	2.81	1.20299
LiI	56	498.1	40.31	3.3	6.64844	2.33	0.97128
NaF	20	536	34.81	3.4	10.40219	2.62	1.75972
NaCl	28	366	74.65	2.0	13.87069	2.08	1.09408
NaBr	46	302	109.64	1.5	17.80345	1.89	0.95611
NaI	64	258	150.23	1.0	19.46375	2.06	0.76288
KF	28	428	54.59	2.4	12.77124	2.37	1.37756
KCl	36	281	126.65	1.3	18.42918	1.88	0.85686
KBr	54	213	220.42	0.8	26.08498	1.76	0.69685
KI	72	186.5	287.5	0.57	29.81083	1.89	0.61055
RbF	46	376	70.73	1.9	15.52484	2.31	1.29239
RbCl	54	228	192.37	0.92	24.76854	1.75	0..75816
RbBr	72	169.5	348.06	0.46	40.90272	1.94	0.69196
RbI	90	138.5	521.32	0.34	50.87280	1.75	0.57461
CsF	64	352.6	80.43	1.61	16.62230	2.39	1.21687
CsCl	72	214.2	217.95	0.73	27.68471	1.95	0.74794
CsBr	90	149.7	446.23	0.37	49.51605	1.88	0.65340
CsI	108	119.2	703.80	0.25	64.91783	1.76	0.54313

जहाँ

Ne = इलेक्ट्रानों की संख्या,

$\omega''_e x''_e$ = आद्य अवस्था अप्रसंवादिता स्थिरांक (सेमी$^{-1}$),

D_o = वियोजन ऊर्जा (इलेक्ट्रान वोल्ट),

ω''_e = आद्य अवस्था कम्पन आवृत्ति (सेमी$^{-1}$)

μ = परिष्कृत द्रव्यमान (ए. एस. यू.)

K = बल स्थिरांक (डाइन/सेमी)

सारणी 4 *क्षारीय धातुओं के एक-हेलोजनों की आद्य अवस्था कम्पन आवृत्ति तथा घूर्णन स्थिरांक*

अणु	ω''_e	आद्य अवस्था	B_e	r_e	D_e	ω''_e *
LiF	910.3	$^1\Sigma^+$	1.3452576	1.563864	1.7554×10^{-5}	910.2
LiCl	643.3	$^1\Sigma^+$	0.7065222	2.020673	3.4087×10^{-6}	643.3
LiBr	563.1	$^1\Sigma^+$	0.555399	2.170427	2.159×10^{-6}	563.4
LiI	498.1	$^1\Sigma^+$	0.443182	2.391924	1.448×10^{-6}	490.4
NaF	536	$^1\Sigma^+$	0.4369012	1.92594	1.16×10^{-6}	536.2
NaCl	366	$^1\Sigma^+$	0.2180630	2.36079	3.120×10^{-7}	364.6
NaBr	302	$^1\Sigma^+$	0.1512533	2.50203	1.553×10^{-7}	298.5
NaI	258	$^1\Sigma^+$	0.1178056	2.71145	0.973×10^{-7}	259.3
KF	428	$^1\Sigma^+$	0.27993741	2.17145	0.04834×10^{-5}	426.1
KCl	281	$^1\Sigma^+$	0.1286347	2.66665	1.087×10^{-7}	279.9
KBr	213	$^1\Sigma^+$	0.08122109	2.82078	4.461×10^{-8}	219.2
KI	186.5	$^1\Sigma^+$	0.06087473	3.04784	2.593×10^{-8}	186.5
RbF	376	$^1\Sigma^+$	0.2106640	2.270333	2.6839×10^{-7}	373.3
RbCl	228	$^1\Sigma^+$	0.0876404	2.78673	0.4947×10^{-7}	233.5
RbBr	169.5	$^1\Sigma^+$	0.04752798	2.94474	1.4959×10^{-8}	169.4
RbI	138.5	$^1\Sigma^+$	0.03283293	3.17687	7.380×10^{-9}	138.5
CsF	352.6	$^1\Sigma^+$	0.18436969	2.345351	0.20168×10^{-6}	352.6
CsCl	214.2	$^1\Sigma^+$	0.07209149	2.90627	0.3267×10^{-7}	214.2
CsBr	149.7	$^1\Sigma^+$	0.03606925	3.07225	8.380×10^{-9}	149.7
CsI	119.2	$^1\Sigma^+$	0.02362735	3.31519	3.7146×10^{-9}	119.2

ω''_e * घूर्णन स्थिरांकों से परिकलित आद्य अवस्था कम्पन आवृत्ति

जहाँ, ω''_e = आद्य अवस्था कम्पन आवृत्ति (सेमी$^{-1}$), **Be** = घूर्णन स्थिरांक (सेमी$^{-1}$)

r_e = अन्तरापरमाणविक दूरी (आंगस्ट्राम), D_e = अपकेन्द्री स्थिरांक (सेमी$^{-1}$)

की तुलना करने पर अप्रेक्षित संक्रमणों की सैद्धांतिक उपस्थिति ज्ञात की जा सकती है तथा हुंड की युग्मन स्थितियों के बारे में महत्त्वपूर्ण सूचना प्राप्त की जा सकती है।

वियोजन ऊर्जा

किसी अणु को निम्नतम इलेक्ट्रानिक ऊर्जा स्तर से सामान्य परमाणुओं में वियोजित करने के लिए आवश्यक ऊर्जा को वियोजन ऊर्जा कहते हैं। इसकी सहायता से आणविक स्थायित्व का अनुमान लगाया जाता है। वियोजन ऊर्जा से कम ऊर्जा पर अणु आणविक अवस्था में रहता है तथा ऊर्जा की मात्रा बढ़ाने पर अणु परमाणुओं में विखंडित हो जाता है। स्रेक्ट्रमी स्थिरांक का उपयोग करके द्विपरमाणुविक अणुओं की वियोजन ऊर्जा का मान सुनिश्चित किया जा सकता है। यह राशि रैखिक विरगे-स्पोनर[20] के बहिर्वेशन सूत्र का उपयोग करके ज्ञात की जा सकती है। रैखिक विरगे-स्पोनर बहिर्वेशन ऊर्जा का मान निम्नांकित समीकरण से प्रदर्शित किया जा सकता है—

$$D_0 = \omega_e^2/4\,\omega_e x_e$$

जहाँ $\omega_e x_e$ अप्रसंवादिता स्थिरांक (सेमी$^{-1}$), D_0 = वियोजन ऊर्जा (इलेक्ट्रान वोल्ट)

उपर्युक्त समीकरण से स्पष्ट है कि वियोजन ऊर्जा के तार्किक मान के लिए अप्रसंवादिता के अत्यधिक परिशुद्ध मान की आवश्यकता होती है। कम्पन स्थिरांकों का उपयोग करके हमने क्षार धातुओं के एक-हैलोजनों की वियोजन ऊर्जा (D_0) की गणना की जो सारणी 3 में दर्शायी गयी है। चूँकि आद्य अवस्था में पर्याप्त मात्रा में आद्य प्रमात्रा (Quanta) का प्रेक्षण किया गया है, इसलिए सारणी 3 में एकत्रित बहिर्वेशन मान अत्यधिक परिशुद्ध प्रतीत होते हैं।

बल स्थिरांक

अणु में आणविक स्प्रिंग की संकल्पना, जो कि घटक परमाणुओं को बाँधे रखती है, बल स्थिरांक को जन्म देती है। बल स्थिरांक का अध्ययन कूप के तल में वक्रता को प्रदर्शित करता है तथा साम्यावस्था में अणु की रेखीय संरचना को इंगित करता है। क्षार धातुओं के एक-हैलोजनों की विभिन्न ऊर्जा अवस्थाओं के बल स्थिरांक के मान की गणना निम्नांकित सम्बन्ध से ज्ञात की जा सकती है—

$$k = 4\pi^2 c^2 \omega_e^2 \mu_A$$

$$= 5.8883 \times 10^{-2}\,\omega_e^2 \mu_A \qquad \text{(डाइन/सेमी)}$$

जहाँ ω_e = ऊर्जा अवस्था की कम्पन आवृत्ति (सेमी$^{-1}$) और $\mu_A = \mu N$ (N = एवोगेद्रो संख्या)

परिष्कृत द्रव्यमान (ए. एम. यू.) है। भिन्न-भिन्न अवस्थाओं के लिए गणना किये गये बल स्थिरांकों के मान सारणी 3 में दिये गये हैं। चूँकि ω_e का प्रेक्षित मान अत्यधिक परिशुद्ध है, इसलिए गणना किए गये बल स्थिरांक ठीक प्रतीत होते हैं।

कम्पन स्थिरांक एवं घूर्णन स्थिरांक के मध्य सम्बन्ध

क्रेटजर[20] के सूत्र $D = 4B^3/\omega^2$ में घूर्णन स्थिरांक B और D का प्रयोग करके गणना से प्राप्त कम्पन आवृत्ति (ω_e^*) एवं प्रेक्षित मान से निश्चित ω_e की तुलना सारणी 4 में की गयी है। इस सारणी से पूर्णतः स्पष्ट एवं घूर्णन प्रक्षणों से निश्चित किये गये मान के परिमाण की कोटि गणना से प्राप्त विभिन्न इलेक्ट्रान अवस्थाओं के मानों के अनुरूप हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय (के. एन. उत्तम तथा एस. कुमार) क्रमशः यू जी सी तथा सी एस आई आर, नई दिल्ली के प्रति अपना आभार व्यक्त करते हैं जहाँ से लेखकों को शोध परियोजना एवं छात्रवृत्ति के रूप में वित्तीय सहायता प्राप्त हुई।

निर्देश

1. ह्यूबर, के. पी. तथा हजबर्ग, जी. : Molecular Spectra and Molecular Structure IV. Constants of Diatomic Molecules, Van Nostrand Reinhold, New York, 1979.
2. व्युम, के. : Molecule in stars, in Les Molecule dans Les Astres, Institute. d' Astrophysique, Belgium, 1957, p. 23.
3. मालिया, ई. ए. : Molecules in Astronomy, 1974, 2, 554.
4. लैम्बर्ट, डी. एल. : The study of Small Molecules in Stellar Atmospheres in Les spectres Des Molecules Simples Au Laboratories Et. En Astrophysique, Universite De Liege Institute d' Astrophysique, Belgium, 1977, p. 173.
5. कालकर, सी. डी., आजाद, के. ए. तथा शर्मा, के. : Int. J. Appl. Radiat & Isot, 1984, 35, 677-688.
6. जकोट गुईलरमोड, आर., बिंज, एफ., बास्चुंग, एम., पिलर,सी., स्कैलर, एल. ए., स्केलनबर्ग, एल., स्केन्यूली, ए. तथा सिरोडोविस, डी. : Phys. Rev. A. Gen. Phys., 1988, 37, 3795-800.
7. स्टेगरवाल्ड, एफ., लैंगाफ, एच. तथा हैमर, डब्ल्यू : J. Chem. Phys., 1988, 88, 7376-7379.
8. पाकेट, के. एफ. जी., कोट, ए., सेडेरबर्ग, जे., निट, डी., कोन, ए., ओल्सन, डी., गुन्डरसन, के., लिन्डास, एस. तथा विक, एस. : J. Mol. Struct., 1988, 190, 143-148.

9. बेन्जामिन, आई. तथा विल्सन, के. आर. : J. Phys. Chem., 1991, 95, 3514-3518.

10. मासुमोटो, वाई., वामुरा, टी. तथा कवामुरा, टी. : Appl. Phys. Lett., 1991, 58, 2270-2272.

11. सुरकस, ए. : Lith. Phys. J., 1991, 31, 150-153.

12. कैम्प्स, आर. एच. : Prog. Theor. Phys., 1994, 1991, 835-838.

13. मुन्टीयानू, ए., गुओ, बी., तथा बर्नाथ, पी. एफ. : J. Mol. Specrtosc., 1996, 176, 274-279.

14. लेइनिंगर, टी., निचलास, ए., कुचले, डब्ल्यू., स्टॉल, एच., डाग, एम., तथा बर्गनर, ए. : Chem. Phys. Lett. 1996, 255, 274-288.

15. लियू, एम-सी., मुन्टीयानू, ए., जोंग, के. क्यू., कोलारुसो, पी. तथा बर्नाथ, पी. एफ. : J. Mol. Spectosc., 1996, 180, 188-192.

16. राम, आर. एस., डुलिक, एम., गुओ, बी., जोंग के.-क्यू. तथा बर्नाथ, पी. एफ. J. Mol. Specrtosc., 1997, 183, 360-373.

17. नॉप, जी., स्कमिट, एम., मेटरनी, ए. तथा कीफर, डब्ल्यू. : J. Phys. Chem., 1997, 101, 4852-4859.

18. डेविस, के. ए. तथा इविंग, जी. ई. : J. Chem. Phys., 1997, 107, 8073-8082.

19. स्वानबर्ग, एस. : Atomic and Molecular Spectroscopy, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

20. हजबर्ग, जी. : Molecular Spectra and Molecular Structure I. Spectra of Diatomic Molecules, D Van Nostrand Reinhold Inc., New Yark, 1950.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 4, October 2002.

सार्वीकृत काम्पे द फेरी फलन के कतिपय रूपान्तर

पंकज श्रीवास्तव
सम्प्रयुक्त गणित विभाग, मोतीलाल नेहरू रीजनल इंजीनियरिंग कालेज, इलाहाबाद (उ. प्र.)

[प्राप्त — मार्च 21,2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य $\frac{-x}{1-x-y}$, $\frac{-y}{1-x-y}$ तथा $\frac{-x}{(1-x)(1-y)}$, $\frac{-y}{(1-x)(1-y)}$ पर सार्वीकृत काम्पे द फेरी फलन के कतिपय रूपान्तर प्राप्त करना है। प्राप्त परिणामों में से कुछ ज्ञात परिणामों की विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं और कुछ सर्वथा नवीन हैं।

Abstract

Certain transformations of generalized Kampe' de Fe'riet function. *By* Pankaj Srivastava, Department of Applied Mathematics, Motilal Nehru Regional Engineering College, Allahabad (U.P.).

The purpose of this paper is to obtain the transformations of generalized Kampe' de Fe'riet function at arguments, $\frac{-x}{1-x-y}$, $\frac{-y}{1-x-y}$ and $\frac{-x}{(1-x)(1-y)}$, $\frac{-y}{(1-x)(1-y)}$. Some of the results obtained as special cases are known results and some one quite new.

1. प्रस्तावना

बर्चनाल तथा चांडी[2] का अनुसरण करने पर काम्पे द फेरी फलन को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है—

$$F^{p:q;q'}_{r:s:s'}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(b'_{q'});\\(c_r):(d_s);(d'_{s'});\end{matrix}\; x, y\right]$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{[(a_p)]_{m+n} [(b_q)]_m [(b'_{q'})]_n}{[(c_r)]_{m+n} [(d_g)]_m [(d'_{s'})]_n \, m! \, n!} x^m y^n \qquad (1.1)$$

जहाँ (ap) से p प्राचलों $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_p$ का अनुक्रम सूचित होता है एवं

$$(\lambda)_n = \frac{\sqrt{(\lambda + n)}}{\Gamma \lambda} = \begin{cases} \lambda(\lambda + 1) \ldots (\lambda + n - 1), & n \neq 0 \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$$

(1.1) में दी गई श्रेणी निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत परम अभिसारी है।

(i) x तथा y के के समस्त मानों के लिए यदि $p + q < 1 + r + s$ तथा $p' + q' < 1 + r' + s'$

(ii) यदि $p + q = 1 + r + s$ तथा $p + q' = 1 + r + s'$ तथा $p \neq r$ तो श्रेणी (1.1) अभिसारी है

वक्र $|x|^{\frac{1}{p-1}} + |y|^{\frac{1}{p-1}} = 1$ एवं $|x| = 1$ एवं $|y| = 1$ के उभयनिष्ठ क्षेत्र में जिसमें मूल बिन्दु रहता है यदि $p = r$। तब n समस्त $x < 1$ तथा $y < 1$ के लिए अभिसारी है

(iii) यदि $x = 1, y = 1$ एवं p = r, तो (1.1) अभिसारी है यदि

$$\text{Re}\left[\sum C_r + \sum d_s - \sum a_p - \sum b_q\right] > 0,$$

$$\text{Re}\left[\sum C_r + \sum d'_{s'} - \sum a_p - \sum b'_{q'}\right] > 0.$$

(iv) यदि $p < r$ एवं $|x| = 1, |y| = 1$ तब श्रेणी (1.1) समस्त प्राचलों के लिए अभिसारी है।

2. इस अनुभाग में निम्नांकित परिणामों की स्थापना की जावेगी—

$$(1 - x)^{-g} (1 - y)^{-h} F^{p:q;q'}_{r:s;s'}$$

$$\times \left[\begin{matrix} (a_p) : (b_q); (b'_{q'}); \\ (c_r) : (d_s); (d'_{s'}); \end{matrix} \frac{-x}{(1 - x)(1 - y)}, \frac{-y}{(1 - x)(1 - y)} \right]$$

$$= \sum_{u, v=0}^{\infty} \frac{(g)_u (h)_v}{u! \; v!} x^u y^v F^{p:q+2;q'+2}_{r+2:s;s'}$$

$$\times \left[\begin{matrix} (a_p) & : -u, h+v, (b_q); -v, g+u, (b'_{q'}); \\ (c_r), g, h : (d_s) & ; (d'_{s'}); \end{matrix} \; 1, 1\right] \quad (2.1)$$

$$(1-x-y)^{-k} F^{p:q;q'}_{r:s;s'}$$

$$\times \left[\begin{matrix} (a_p) : (b_q); (b'_{q'}); \\ (c_r) : (d_s); (d'_{s'}); \end{matrix} \; \frac{-x}{(1-x-y)}, \frac{-y}{(1-x-y)}\right]$$

$$= \sum_{u, v=0}^{\infty} \frac{(k)_{u+v}}{u! \; v!} x^u y^v F^{p:q+1;q'+1}_{r+1:s;s'}$$

$$\times \left[\begin{matrix} (a_p) & : -u, (b_q); -(v), (b'_{q'}); \\ (c_r), k & : (d_g) \quad ; (d'_{g'}); \end{matrix} \; 1, 1\right] \quad (2.2)$$

(2.1) तथा (2.2) की उपपत्ति : (2.1) को सिद्ध करने के लिए हम निम्नांकित पर विचार करेंगे—

$$(1-x)^{-p} (1-y)^{-h} F^{p:q;q'}_{r:s;s'}$$

$$\times \left[\begin{matrix} (a_p) : (b_q); (b'_{q'}); \\ (c_r) : (d_s); (d'_{s'}); \end{matrix} \; \frac{-x}{(1-x)(1-y)}, \frac{-y}{(1-x)(1-y)}\right]$$

$$= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{[(a_p)]_{m+n} [(b_q)]_m [(b'_{q'})]_n (-x)^m (-y)^n}{[(c_r)]_{m+n} [(d_s)]_m [(d'_{s'})]_n \, m! \, n!}$$

$$\times (1 - x)^{-(g+m+n)} (1 - y)^{-(h+m+n)}$$

$$= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{[(a_p)]_{m+n} [(b_q)]_m [(b'_{q'})]_n (-x)^m (-y)^n}{[(c_r)]_{m+n} [(d_s)]_m [(d'_{s'})]_n \, m! \, n!}$$

$$\times \sum_{u, v=0}^{\infty} \frac{(g + m + n)_u (h + m + n)_v}{u! \, v!} x^u y^v$$

अब u तथा v के स्थान पर क्रमशः $u - m$ तथा $v - n$ रखने पर

$$= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{[(a_p)]_{m+n} [(b_q)]_m [(b'_{q'})]_n (-1)^{m+n}}{[(c_r)]_{m+n} [(d_s)]_m [(d'_{s'})]_n \, m! \, n!}$$

$$\times \sum_{u, v=0}^{\infty} \frac{(g + m + n)_{u-m} (h + m + n)_{v-n}}{(u - m)! \, (v - n)!} x^u y^v$$

$$= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{[(a_p)]_{m+n} [(b_q)]_m [(b'_{q'})]_n (-1)^{m+n}}{[(c_r)]_{m+n} [(d_s)]_m [(d'_{s'})]_n \, m! \, n!}$$

$$\times \sum_{u, v=0}^{\infty} \frac{(g)_u (g + u)_n (h)_v (h + v)_m (-u)_m (-v)_n}{(g)_{m+n} (h)_{m+n} \, u! \, v!} x^u y^v$$

$$= \sum_{u, v=0}^{\infty} \frac{(g)_u (h)_v}{u! \, v!} x^u y^v$$

$$\times \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{[(a_p)]_{m+n} [(b_q)]_m [(b'_{q'})]_n}{[(c_r)]_{m+n} (g)_{m+n} (h)_{m+n}}$$

$$\times \frac{(h+v)_m (g+u)_n (-u)_m (-v)_n}{[(d_s)]_m [(d'_{s'})]_n m! n!} x^u y^v$$

$$= \frac{(g)_u (h)_v}{u! v!} x^u y^v F^{p:q+2;q'+2}_{r+2:s;s'}$$

$$\times \left[\begin{matrix} (a_p) & : -u, h+v, (b_q); -v, g+u, (b'_{q'}); \\ (c_r), g, h : (d_s) & ; (d'_{s'}); \end{matrix} 1, 1 \right].$$

(2.2) को सिद्ध करने के लिए हम निम्नवत् अग्रसर होंगे

$$(1-x-y)^{-k} F^{p:q;q'}_{r:s;s'}$$

$$\times \left[\begin{matrix} (a_p) : (b_q); (b'_{q'}); \\ (c_r) : (d_s); (d'_{s'}); \end{matrix} \frac{-x}{(1-x-y)}, \frac{-y}{(1-x-y)} \right]$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_p)_{m+n} (b_q)_m (b'_{q'})_n (-x)^m (-y)^n (1-x-y)^{-(k+m+n)}}{(c_r)_{m+n} (d_s)_m (d'_{s'})_n m! n!}$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_p)_{m+n} (b_q)_m (b'_{q'})_n (-1)^{m+n}}{(c_r)_{m+n} (d_s)_m (d'_{s'})_n m! n!}$$

$$\times \sum_{u,v=0}^{\infty} \frac{(k+m+n)_{u+v}}{u! v!} x^{u+m} y^{v+n}$$

अब u तथा v को क्रमशः $u-m$ तथा $v-n$ से स्थानान्तरित करने पर

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_p)_{m+n} (b_q)_m (b'_{q'})_n (-1)^{m+n}}{(c_r)_{m+n} (d_s)_m (d'_{s'})_n m! n!}$$

$$\times \sum_{u,v=0}^{\infty} \frac{(k+m+n)_{[u+v-(m+n)]}}{(u-m)!\,(v-n)!} x^u y^v.$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_p)_{m+n} (b_q)_m (b'_{q'})_n}{(c_r)_{m+n} (d_s)_m (d'_{s'})_n\, m!\, n!}$$

$$\times \sum_{u,v=0}^{\infty} \frac{(k)_{u+v} (-u)_m (-v)_n}{(k)_{m+n}\, u!\, v!} x^u y^v$$

$$\times \sum_{u,v=0}^{\infty} \frac{(k)_{u+v}}{u!\, v!} x^u y^v$$

$$\times \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_p)_{m+n} (b_q)_m (-u)_m (b'_{q'})_n (-v)_n}{(c_r)_{m+n} (k)_{m+n} (d_s)_m (d'_{s'})_n\, m!\, n!}$$

$$\times \sum_{u,v=0}^{\infty} \frac{(k)_{u+v}}{u!\, v!} x^u y^v F^{p:q+1;q'+1}_{r+1:s;s'}$$

$$\times \left[\begin{matrix} (a_p) & : (b_q), -u & ; (b'_{q'}), -v; \\ (c_r), k & : (d_s) & ; (d'_{s'}); \end{matrix} \quad 1, 1 \right]$$

3. विशिष्ट दशाएं

$p = r + 2$, $a_i = c_i (i = 1, 2, 3, \ldots, r)$, $a_{r+1} = g$ तथा $a_{r+2} = h$, $s = q + 1$, $d_i = b_i (i = 1, 2, \ldots, q)$, $d'_i = b'_i (i = 1, 2, 3, \ldots, q)$, $d_{q+1} = \alpha$ एवं $d'_{q+1} = \beta$, रखने पर

$$(1-x)^{-g} (1-y)^{-h} F_4 \left[g, h; \alpha, \beta; \frac{-x}{(1-x)(1-y)}, \frac{-y}{(1-x)(1-y)} \right]$$

$$= \sum_{u, v=0}^{\infty} \frac{(g)_u \, (h)_v}{u! \, v!} x^u y^v \, {}_2F_1[-u, h+v; \alpha; 1] \times [-v, g+u; \beta; 1]$$

$$\sum_{u, v=0}^{\infty} \frac{(g)_u \, (h)_v}{u! \, v!} x^u y^v \frac{\sqrt{(\alpha)} \, \sqrt{\alpha - h + u - v} \, \sqrt{\beta + v - g - u} \, \sqrt{\beta}}{\sqrt{(\alpha + u)} \, \sqrt{(\alpha - h - u)} \, \sqrt{(\beta + v)} \, \sqrt{(\beta - g - u)}}$$

$$= \sum_{u, v=0}^{\infty} \frac{(g)_u \, (h)_v}{u! \, v!} x^u y^v$$

$$\times \frac{(1-\alpha+h)_v \, (1-\beta+g)_u \, \sqrt{(\alpha - h)} \, (\alpha - h)_{u-v} \, \sqrt{(\beta - g)} \, (-1)}{(\beta)_v \, (\alpha)_u \, (-)^{u+v} \, (1-\beta+g)_{u-v} \, \sqrt{(\alpha - h)} \, \sqrt{(\beta - g)}} \tag{3.1}$$

अब (3.1) में $\alpha - h = 1 - \beta + g$ अथवा $\beta = 1 + g + h - \alpha$ रखने पर

$$(1-x)^{-g}(1-y)^{-h}$$

$$\times F_4\left[g, h; \alpha, 1+g+h-\alpha; \frac{-x}{(1-x)(1-y)}, \frac{-y}{(1-x)(1-y)}\right]$$

$$= {}_2F_1[g, \alpha - h; \alpha; x] \times {}_2F_1[h, 1-\alpha+h; 1+g+h-\alpha; y] \tag{3.2}$$

यह पहले से प्राप्त परिणाम है[2, 4, 7, 8] ।

(2.2) में $p = r + 1$ ($a_i = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$), $a_{r+1} = k$, रखने पर

$$(1-x-y)^{-k} F^{1:q;q'}_{:s;s'}$$

$$\times \left[\begin{matrix} k & : (b_q); (b'_{q'}); \\ & : (d_s); (d'_{s'}); \end{matrix} \frac{-x}{(1-x-y)}, \frac{-y}{(1-x-y)}\right]$$

$$= \sum \frac{(k)_{u+v}}{u! \, v!} x^u y^v \, {}_{q+1}F_s\left[(b_q), -u; (d_s), 1\right]$$

$$\times {}_{q'+1}F_{s'}\left[\left(b'_{q'}\right), -v'; \left(d'_{s'}\right), 1\right] \tag{3.3}$$

(3.3) में $q = q' = s = s' = 1$ रखने पर तथा $b_1 = b, b'_1 = b'$ एवं $d_1 = d, d'_1 = d'$ रखने पर

$$(1-x-y)^{-k} F^{1:1;1}_{0:1;1}\left[\begin{matrix} k & : b; b'; \\ & : d; d'; \end{matrix} \frac{-x}{(1-x-y)}, \frac{-y}{(1-x-y)}\right].$$

$$= F^{1:1;1}_{0:1;1}\left[\begin{matrix} k : d-b; d'-b'; \\ : d; d'; \end{matrix} x, y\right] \tag{3.4}$$

(3.4) में $y=0$ लेने पर

$$(1-x)^{-k}\,{}_2F_1\left[k, b; d; \frac{-x}{1-x}\right] = {}_2F_1[k, d-b; d; x]$$ (2; 1. 7. 1.. 3)

यह ज्ञात परिणाम है।

(3.3) में $q = q' = s = s' = 2$ तथा $b_1 = a, b_2 = b, d_1 = 1+a-b, d_2 = 1+a+u, b'_1 = a', b'_2 = b', d'_1 = 1 + a' - b', d'_2 = 1 + a' + v$ रखने पर

$$(1-x-y)^{-k} F^{1:2;2}_{0:2;2}$$

$$\times\left[\begin{matrix} k: a, \quad b; \quad a' \quad b'; \\ : 1+a-b, 1+a+u; 1+a'-b'; 1+a'-v'; \end{matrix} \frac{-x}{(1-x-y)}, \frac{-y}{(1-x-y)}\right]$$

$$= \sum \frac{(k)_{u+v}}{u!\,v!} x^u y^v\,{}_3F_2\left[\begin{matrix} a, \quad b, -u; \\ 1+a-b, 1+a+u; \end{matrix} 1\right]$$

$$\times\,{}_3F_2\left[\begin{matrix} a', \quad b', -v; \\ 1+a'-b', 1+a'+v'; \end{matrix} 1\right]$$

(2, III, 9) का प्रयोग करने पर।

$$= \sum_{u,v=0}^{\infty} \frac{(k)_{u+v}(1+a)_u\left(1+\frac{1}{2}a-b\right)_u(1+a')_v\left(1+\frac{1}{2}a'-b'\right)_v}{u!\,v!\left(1+\frac{1}{2}a\right)_u(1+a-b)_u\left(1+\frac{1}{2}a'\right)_v(1+a'-b')_v} x^u y^v$$

$$\times F^{1:2;2}_{0:2;2}\left[\begin{matrix} k:(1+a),\left(1+\frac{1}{2}a-b\right);(1+a'),\left(1+\frac{1}{2}a'-b'\right); \\ \left(1+\frac{1}{2}a\right),(1+a-b):\left(1+\frac{1}{2}a'\right);(1+a'-b'); \end{matrix} x, y\right] \tag{3.5}$$

(3.5) में $y=0$ खने पर

$$(1-x)^{-k}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix} k, a, b; \\ 1+a-b, 1+a+u; \end{matrix} \frac{-x}{1-x}\right]$$

$$= {}_3F_2\left[\begin{matrix} k, 1+a, 1+\frac{1}{2}a-b; \\ 1+\frac{1}{2}a, 1+a-b; \end{matrix} x\right]$$

$q = q' = s = s' = 2$ तथा (3.3) में

$b_1 = a,\ b_2 = b,\ d_1 = 1+a-b,\ d_2 = 1+2b-u,$

$b'_1 = a',\ b'_2 = b',\ d'_1 = 1+a'-b',\ d'_2 = 1+2b'-v$ रखने पर

$$(1-x-y)^{-k} F^{1:2;2}_{0:2;2}$$

$$\times\left[\begin{matrix} k: a, \quad b; \quad a' \quad b'; \\ : 1+a-b, 1+2b-u; 1+a'-b'; 1+2b'-v'; \end{matrix} \frac{-x}{(1-x-y)}, \frac{-y}{(1-x-y)}\right]$$

$$= \sum_{u,v=0}^{\infty} \frac{(k)_{u+v}}{u!\,v!} x^u y^v\,{}_3F_2\left[\begin{matrix} a, \quad b, -u; \\ 1+a-b, 1+2b-u; \end{matrix} 1\right]$$

$$\times\ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a', & b', -v; \\ 1+a'-b', & 1+2b'-v'; \end{matrix}\ 1\right]$$

(2, Appendix III 16) का प्रयोग करने पर।

$$= F^{1:3;3}_{0:3;3}\left[\begin{matrix} k: a-2b, 1+\frac{1}{2}a-b, -b; a'-2b', 1+\frac{1}{2}a'-b', -b'; \\ :1+a-b, \frac{1}{2}a-b, -2b; 1+a'-b', \frac{1}{2}a'-b', -2b'; \end{matrix}\ x, y\right] \tag{3.6}$$

अब (3.6) में $y=0$ रखने पर

$$(1-x)^{-k}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix} k, a, b; \\ 1+a-b, 1+2b-u; \end{matrix}\ \frac{-x}{1-x}\right]$$

$$= {}_4F_3\left[\begin{matrix} k, a-2b, 1+\frac{1}{2}a-b, -b; \\ 1+a-b, \frac{1}{2}a-b, -2b; \end{matrix}\ x\right]$$

इसी तरह अन्य अनेक रोचक रूपान्तर प्राप्त किये जा सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक इस शोधपत्र की तैयारी में मूल्यवान सुझावों के लिए डॉ. एस. एन. सिंह का आभारी है।

निर्देश

1. ऐपेल, पी. तथा कैम्पे, द फेरी, जे. : "Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques, Paris, Gautier Villars, 1926.
2. स्लेटर, एल. जे. : Generalized hypergeometric functions, Cambridge 1966.
3. बर्चनाल, जे. एल. तथा चांडी, टी. डब्लू. : Quart J. Math (Oxford) 1942.
4. श्रीवास्तव, जी. पी. : The Mathematics Student, 1971.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, **150**, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख ''सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2''इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 20 पौंड या 50 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 6 पौंड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. : 100 or 20 £ or $ 50
Per. Vol. Rs.: 25 or 6 £ or $ 10

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-२

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad-2 (India)

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर्स
7, बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405